Übungsblatt 9

Aufgabe 36: Koerzitivität eines degeneriert konvexen Funktionals.
Es seien $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^d$, $\alpha > 0$, $q \in [1, \infty[$ und

$$I(u) = \int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u(x)|^q \, \mathrm{d}x.$$

(a) Es sei $p \in [1, q]$. Zeige, dass $I : \mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \to [0, \infty]$ strikt konvex ist.

(b) Leite mittels einer HÖLDER-Abschätzung die Koerzitvität von I auf $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ her, falls $p\alpha < d(q-p)$ gilt.

(c) Es sei nun $d = 1$ und $M = \{\, u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \mid u(\pm 1) = \pm 1 \,\}$. Untersuche die Existenz eines Minimizers für alle Fälle von α, p und q. Gebe diesen gegebenfalls explizit an.

Aufgabe 37: Verallgemeinerung des Satzes von Ioffe. Wir wollen die Bedingungen für die schwache Unterhalbstetigkeit für Funktionale $I : u \mapsto \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x)) \, \mathrm{d}x$ abschwächen. Im Satz von Ioffe wird $f(x, u, A) \geq h(x)$ mit $h \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ verlangt.

Finde möglichst große $q \in [1, \infty]$, so dass I auf $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ schwach unterhalb folgenstetig ist, wenn f sich nach unten durch $f(x, u, A) \geq h(x) - c|u|^p$ abschätzen lässt und auch alle anderen Bedingungen im Satz von Ioffe erfüllt.

Zeige, dass ein Funktional schwach unterhalbfolgenstetig sein kann, auch wenn es nicht koerziv ist.

Aufgabe 38: Fehlende schwache Unterhalbfolgenstetigkeit. Es sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ und $s \in [1, 6]$. Für $u \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^3$ sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(u, A) = \frac{1}{2}|A|^2 - 1000|u|^s$.

Zeige, dass $I : \mathrm{H}^1(\Omega) \to \mathbb{R};\ u \mapsto \int_\Omega f(u(x), \nabla u(x)) \, \mathrm{d}x$ nur dann schwach unterhalbfolgenstetig ist, wenn $s < 6$ gilt.

Hinweis: Die Folge $u_k(x) = k \max\{0,\, 1 - k^2|x|\}$ ist recht interessant.

Aufgabe 39: Yosida-Moreau-Regularisierung. Es sei $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_\infty$ gegeben, wobei ein $u_* \in \mathbb{R}^k$ mit $f(u_*) < \infty$ existiere. Für festes $\omega > 0$ setzen wir

$$f_\lambda(u) = \min\{\, f(v) + \lambda |u - v|^\omega \mid v \in \mathbb{R}^k \,\}.$$

(a) Zeige, dass $f_\lambda : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ (ohne "∞") stetig ist.

(b) Zeige die Monotonie $f_\lambda(u) \leq f_\mu(u) \leq f(u)$ für $\lambda < \mu$. Untersuche unter welchen Voraussetzungen $f_\lambda(u) \to f(u)$ für $\lambda \to \infty$ gilt.

(c) Für welche ω überträgt sich die Konvexität von f auf f_λ?

Abgabe der Lösungen am 11. Januar 2010.