Übungsblatt 8

Aufgabe 32: Starke Stetigkeit.
Betrachte eine Funktion $f \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^m)$, die für ein $p \in [1,\infty[$ und $C > 0$ die Abschätzung $|f(x,u)| \leq C(1+|u|^p)$ für alle x und u erfüllt. Zeige, dass das Funktional

$$I : \begin{cases} \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{R}^m) & \to & \mathbb{R}, \\ u & \mapsto & \int_\Omega f(x,u(x))\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

stetig (in der Normtopologie) ist.

Aufgabe 33: Schwache Konvergenz in Sobolev-Räumen.
Wir wollen zeigen, dass $u_k \rightharpoonup u$ in $\mathrm{W}^{k,p}(\Omega)$ genau dann gilt, wenn für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq k$ die Konvergenz $\mathrm{D}^\alpha u_k \rightharpoonup \mathrm{D}^\alpha u$ in $\mathrm{L}^p(\Omega)$ gilt.

(a) Identifiziere $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ mittels $v = (\mathrm{D}^\alpha u)_{|\alpha|\leq k}$ mit einem abgeschlossenen Unterraum U_p des Raumes $V_p = \bigotimes_{|\alpha|\leq k} \mathrm{L}^p(\Omega)$.

(b) Zeige, dass die schwache Konvergenz in V_p eingeschränkt auf U_p genau die schwache Konvergenz in $\mathrm{W}^{k,p}(\Omega)$ bedeutet und folgere die gewünschte Charakterisierung.

Aufgabe 34: Dualraum-Einbettung. Betrachte zwei Banach-Räume $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ mit dichter und stetiger Einbettung $X \subset Y$.

(a) Definiere auf dem Dualraum Y^* von Y die Abbildung

$$\|\cdot\|_* : \begin{cases} Y^* & \to & \mathbb{R}, \\ \eta & \mapsto & \sup\limits_{\|x\|_X=1} \langle \eta, x\rangle_{Y^*\times Y} \end{cases}$$

Zeige, dass $\|\cdot\|_*$ eine Norm auf Y^* definiert, die schwächer ist als $\|\cdot\|_{Y^*}$.

(b) Beweise, dass die Vervollständigung $(X^\circ, \|\cdot\|_*)$ von $(Y^*, \|\cdot\|_*)$ eine Darstellung des Dualraums von X^* ist und dass damit Y^* dicht und stetig in X^* eingebettet ist.

Aufgabe 35: Weihnachtliche Preisaufgabe. Gegeben sei das Funktional

$$I_\theta(u) = \int_0^1 \frac{u'(x)^2}{1+u'(x)^4} + \theta^2|u'(x)| + (u(x)-x)^2\,\mathrm{d}x$$

auf $X = \{\, u \in \mathrm{H}^1(]0,1[) \mid u(0) = 0 \,\}$. Berechne $g(\theta) = \inf_{u\in X} I_\theta(u)$ und charakterisiere in Abhängigkeit von θ das Verhalten von u und u' entlang aller infimierenden Folgen.
Die beste Lösung dieser Aufgabe gewinnt einen Büchergutschein über 50 Euro. Abgabefrist ist Montag, der 1. Februar 2010.

Abgabe der Lösungen der Aufgaben 32–34 am 4. Januar 2010.