

## Übungsblatt 1

**Aufgabe 1: Lineare Algebra.** Sei  $I(u) = \frac{1}{2}\langle u, Au \rangle - \langle b, u \rangle$  mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b, u \in \mathbb{R}^n$ , und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das euklidische Skalarprodukt.

- Zeige, dass  $u$  genau dann ein kritischer Punkt von  $I$  ist, wenn  $\frac{1}{2}(A + A^T)u = b$  ist.
- Nimmt  $I$  sein Infimum an, falls  $A$  symmetrisch und positiv definit ist?
- Es sei  $A$  symmetrisch und positiv semidefinit. Unter welchen Bedingungen an  $b$  ist  $\inf I > -\infty$ ? Gilt dann  $\inf I = \min I$ ?

**Aufgabe 2: Vektoranalysis.**

- Beweisen Sie, dass eine differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nur dann ein Extremum im Punkt  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  besitzt, wenn  $x^0$  ein kritischer Punkt von  $f$  ist, d.h. die erste Variation ist 0.
- Sei  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  ein kritischer Punkt einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Zeige, dass die Funktion  $f$  im Punkt  $x^0$  ein lokales Minimum (bzw. Maximum) in  $x^0$  hat, wenn die zweite Variation, d.h. die quadratische Form  $\langle H(x^0)w, w \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x^0) w_i w_j$ , positiv (bzw. negativ) definit ist ( $H(x^0) =$  Hesse-Matrix).

**Aufgabe 3: Extrema ohne Differenzierbarkeit.** Gegeben sei die Funktionenfamilie

$$f_{\alpha, \beta}(x) = \begin{cases} \alpha & \text{für } x = 0; \\ \frac{\beta x^2}{1+x^2} & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$$

mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Geben Sie die Extrema (lokale/globale Maxima und Minima) der Funktion  $f_{\alpha, \beta}$  sowie das Infimum und Supremum in Abhängigkeit der Parameterwerte an.

**Aufgabe 4: Das Beispiel von WEIERSTRASS:** Gegeben sei das Funktional

$$I : M \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \int_{-1}^1 [xu'(x)]^2 dx \text{ mit } M = \{u \in C^1([-1, 1]) \mid u(-1) = -1, u(1) = 1\}.$$

Zeige, dass für jede Folge  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $I(u_k) \rightarrow 0$  auf kompakten Teilmengen von  $[-1, 0) \cup (0, 1]$  gleichmäßige Konvergenz gegen  $u_* : x \mapsto \text{sign}(x)$  vorliegt.

Für  $x > 0$  schätze dazu  $|1 - u(x)| = \left| \int_x^1 u'(s) ds \right|$  durch  $\sqrt{\alpha} C(x)$  ab, wobei  $\alpha = I(u)$  und  $C \in C^0((0, 1])$  sind. Hinweis: Setze  $a(x) = [xu'(x)]^2$  und verwende  $\int_{-1}^1 a(s) ds = \alpha$ .

**Aufgabe 5: Ein Beispiel ohne Minimierer.** Im Folgenraum  $\ell^2$  mit Norm  $\|(u_n)_n\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2\right)^{1/2}$  ist Funktional  $I : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $I(u) = (1 - \|u\|_2^2)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} u_n^2$  definiert.

- Zeige, dass  $I$  stetig ist und dass  $I(u) > 0$  für alle  $u \in \ell^2$  gilt.
- Überprüfen Sie durch Konstruktion einer geeigneten infimierenden Folge, dass das Infimum des Funktionals  $I$  gleich 0 ist.

**Abgabetermin für schriftliche Ausarbeitungen: Montag 26. Oktober 2009**