Übungsblatt 12

Aufgabe 48: Quasikonvexität impliziert Unterhalbstetigkeit

Betrachte eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$ mit $|f(A)| \leq C(1+|A|)^p$. Weiter sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet und $I : \mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ mit $I(u) = \int_\Omega f(\nabla u(x))\,\mathrm{d}x$ das zugehörige Funktional. Es soll gezeigt werden, dass (*) gilt.

$$I \text{ schwach unterhalbfolgenstetig} \implies f \text{ quasikonvex.} \tag{1}$$

(a) Betrachte zunächst Folgen der Form $v_n : x \mapsto Ax + \frac{1}{n}w(nx)$, wobei $w \in \mathrm{W}^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m)$ periodisch ist. Zeige $v_n \rightharpoonup v$ mit $v(x) = Ax$.

(b) Zeige, dass (1) gilt.

(c) Sei nun I mittels $f \in \mathrm{C}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d})$ definiert, wobei wieder $|f(x,u,A)| \leq C(1+|u|+|A|)^p$ gelte. Folgere, dass (1) entsprechend gilt.

Aufgabe 49: Rang-1-Affinität

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathbb{R}$ heißt Rang-1-affin, wenn sowohl f als auch $-f$ Rang-1-konvex sind, d.h.

$$\forall\, A,B \in \mathbb{R}^{m\times d} \text{ mit } \mathrm{Rang}(A-B)=1\ \forall\,\lambda \in [0,1]\colon f(\lambda A+(1-\lambda)B) = \lambda f(A) + (1-\lambda)f(B).$$

(a) Für $\beta^{(s)} \in \mathbb{R}^{\tau_s(m,d)}$ zeige, dass $g : A \mapsto \langle \beta^{(s)}, T_s(A)\rangle$ Rang-1-affin ist.

Es sei nun $d = 2$ und $f : \mathbb{R}^{m\times 2} \to \mathbb{R}$ Rang-1-affin.

(b) Zeige, dass f sich in der Form $f(a_1,a_2) = \alpha + \langle b,a_1\rangle + \langle c,a_2\rangle + \langle Ba_1,a_2\rangle$ schreiben lässt, wobei $A = (a_1,a_2)$ ist und $\alpha \in \mathbb{R}$, $b,c \in \mathbb{R}^m$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ geeignet gewählt seien.

(c) Zeige, dass die Matrix B aus (b) schiefsymmetrsch ist. (Betrachte $f(A + t\xi \otimes \eta)$.)

(d) Zeige, dass ein $\beta \in \mathbb{R}^{\tau(m,2)}$ existiert mit $f(A) = \alpha + \langle \beta, T(A)\rangle$.

Zusatz: Auch für $d \geq 3$ haben alle Rang-1-affinen Funktionen die Form $A \mapsto \alpha+\langle\beta,T(A)\rangle$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}^{\tau(m,d)}$. Der Beweis erfolgt mittels Induktion über d.

Aufgabe 50: Quadratische Funktionale

Es sei f quadratisch in A, d.h. $f(A) = MA{:}A$ mit $M \in \mathbb{R}^{(m\times d)\times(m\times d)}_{\mathrm{sym}}$. Zeige:

(a) f ist konvex $\iff f(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$.

(b) f ist polykonvex $\iff \exists \beta_2 \in \mathbb{R}^{\tau_2(m,d)}$ mit $f(A) \geq \langle \beta_2, T_2(A)\rangle$ für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$.

(c) f ist Rang-1-konvex $\iff f(\xi\otimes\eta) \geq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^m, \eta \in \mathbb{R}^d$.

(bitte wenden)

Aufgabe 51: Gegenbeispiel zur schwachen Unterhalbfolgenstetigkeit

Es sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^d$, $p \in (1,d)$ und $q = dp/(d-p)$. Betrachte auf $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$ das Funktional $I : u \mapsto \int_\Omega |\nabla u(x)|^p - C|u(x)|^q \,\mathrm{d}x$.

(a) Zeige, dass für C hinreichend groß, ein u mit $I(u) < 0$ existiert.

(b) Setze das u aus (a) durch 0 fort und definiere $u_n(x) = n^\alpha u(nx)$. Wähle $\alpha > 0$ so, dass $I(u_n) = I(u)$ gilt. Zeige, dass dann $\|u_n\|_{\mathrm{W}^{1,p}} \leq \|u\|_{\mathrm{W}^{1,p}}$.

(c) Zeige, dass u_n schwach gegen ein u_* konvergiert und dass $I(u_*) > I(u) = \lim_{n\to\infty} I(u_n)$ gilt, d.h. I ist nicht schwach unterhalb folgenstetig auf $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$, obwohl $f(x, u, \cdot)$ konvex ist.

Nächste und letzte Übungsstunde: Mittwoch 11. Juli 2007