

Übungsblatt 11

Aufgabe 45: (schriftlich)

Eine durch den Graphen von $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegebene Kette hängt zwischen den Punkten $A = (0, 0)$ und $B = (1, 0)$. Sie hat die Länge $J(u) = \int_0^1 \sqrt{1+u'^2} dx = l \geq 1$. Welche Form hat diejenige Kette, für die die potentielle Energie $I(u) = \int_0^1 u \sqrt{1+u'^2} dx$ minimal ist? (Finde mögliche Lösungen mittels $DI(u) = \lambda DJ(u)$. Die Lösungskurve wird auch Kettenlinie genannt.)

Aufgabe 46:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt mit Lipschitz-Rand, $p \in (2, \frac{2d}{d-2}) \setminus \{\infty\}$ und $a > 0$. Zeige die Existenz einer schwachen Lösung für folgendes Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u + au &= u |u|^{p-2} && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Betrachte dazu die zugehörige Variationsaufgabe $I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + a|u|^2 dx \rightarrow \min$ auf der Menge $M = \{u \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} |u|^p dx = 1\}$. Beachte $||A|^{p-2} A - |B|^{p-2} B| \leq c(|A| + |B|)^{p-2} |A - B|$ für $A, B \in \mathbb{R}^s$, $p \geq 2$ (ohne Beweis).

Aufgabe 47:

H_0, H_1 seien Hilbert-Räume mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ und Norm $\|\cdot\|_i$. $H_1 \subset H_0$ sei kompakt in H_0 eingebettet, d.h. es existiert ein $c > 0$, so dass für alle $u \in H_1$ die Abschätzung

$$\|u\|_{H_0} \leq c \|u\|_{H_1} \tag{1}$$

gilt, und schwach konvergente Folgen in H_1 konvergieren stark in H_0 .

Zeige: Es gibt ein $u_1 \in H_1 \setminus \{0\}$ und ein $\lambda_1 > 0$ mit

$$\lambda_1 = \|u_1\|_1^2 = \inf \{ \|v\|_1^2 ; \|v\|_0^2 = 1 \}. \tag{2}$$

Ferner gilt $\langle u_1, v \rangle_1 = \lambda_1 \langle u_1, v \rangle_0$ für alle $v \in H_1$.

Die optimale Konstante in (1) (d.h. das kleinste $c > 0$, für welches (1) gilt) ist $c_{\text{opt}} = \lambda_1^{-\frac{1}{2}}$.

Aufgabe 48:

Man bearbeite Aufgabe 43 von Blatt 10.

Nächste Übungsstunde: Mittwoch 04. Juli 2007