

## Übungsblatt 10

### Aufgabe 41:

In der Vorlesung wurde der Begriff *gleichmäßige äußere Kegelbedingung* für beschränkte Gebiete eingeführt. Finde ein dreidimensionales Polyeder, das diese Bedingung nicht erfüllt. (Ein detaillierter Beweis wird nicht verlangt.)

### Aufgabe 42:

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein Gebiet und  $f \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d}, \mathbb{R})$ . Sei ferner  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  ein Minimierer des Funktionals

$$I(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) \, dx.$$

Für eine Kugel  $B_R(x_0) \subset \Omega$  existiere eine Konstante  $M$ , so dass  $|u(x)| + |\nabla u(x)| \leq M$  für fast alle  $x \in \Omega$ . Folgere, dass  $u$  auf  $B_R(x_0)$  folgende schwache Euler-Lagrange-Gleichung erfüllt:

$$\int_{B_R(x_0)} \partial_u f(x, u(x), \nabla u(x)) \cdot \phi + \partial_A f(x, u(x), \nabla u(x)) : \nabla \phi \, dx = 0$$

für alle  $\phi \in C_c^\infty(B_R(x_0))$ .

### Aufgabe 43: (freiwillig)

Gegeben  $I : L^2((0, 1)) \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  mit  $I(u) = \|u\|_{L^4(\Omega)}^4$ . Zeige:

- $I$  ist konvex und stark unterhalbfolgenstetig.
- Bestimme  $\partial I(u)$  für alle  $u \in L^2((0, 1))$ . Überlege dazu, dass für  $u, v \in L^4((0, 1))$  die Richtungsableitung  $DI(u)[v]$  sinnvoll definiert ist. Für welche  $u$  gilt sogar  $DI(u) \in [L^2((0, 1))]'$ ?
- Für alle  $u \in L^2(0, 1)$  mit  $I(u) < \infty$  und für alle  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\ell = \ell(u, \varepsilon) \in L^2(0, 1)'$  mit

$$I(v) \geq I(u) - \varepsilon - \langle \ell, v - u \rangle \quad \forall v \in L^2(0, 1).$$

Hinweis: Man wähle Weg (i) oder (ii):

- Konstruiere  $\ell$  wie folgt: Finde  $R > 0$ ,  $\ell(x)$  und eine Funktion  $a \in L^1(0, 1)$  mit  $\int_0^1 a(x) \, dx \leq \varepsilon$ , so dass

$$f(u(x) + w) - f(u(x)) - \ell(x)w + a(x) \geq 0$$

für alle  $w \in \mathbb{R}$  und fast alle  $x \in (0, 1)$  mit  $|u(x)| \geq R$ . Hierbei  $f(u) = u^4$ .

- Zeige: Sei  $X$  ein Banach-Raum und  $I : X \rightarrow \mathbb{R}_\infty$  sei konvex und unterhalbstetig. Für jedes  $u \in X$  mit  $I(u) < \infty$  und für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert  $\ell \in X'$  so dass für alle  $v \in X$

$$I(v) \geq I(u) - \varepsilon + \langle \ell, v - u \rangle.$$

(bitte wenden)

**Aufgabe 44: (schriftlich)**

Sei  $\Omega_\Phi \subset \mathbb{R}^2$  in Polarkoordinaten gegeben durch

$$\Omega_\Phi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, 0 < r < 1, 0 < \varphi < \Phi\},$$

$0 < \Phi < 2\pi$ . Ferner seien

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0, x \in (0, 1)\},$$

$$\Gamma_\Phi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = r \cos \Phi, y = r \sin \Phi, 0 < r < 1\}.$$

Auf  $\Omega_\Phi$  betrachten wir den Laplace-Operator mit Dirichlet-Randbedingungen auf  $\Gamma_0$  und Neumann-Randbedingungen auf  $\Gamma_\Phi$ :

$$\begin{aligned} \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \Delta u &= 0, & (x, y) \in \Omega_\Phi, \\ u &= 0 & x \in \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \nabla u \cdot \vec{n} &= 0 & x \in \Gamma_\Phi, \end{aligned}$$

wobei  $\vec{n}$  der äußere Normalenvektor auf  $\Gamma_\Phi$  ist.

Man bestimme sämtliche Lösungen der Form  $u = r^\alpha v(\varphi)$  mit  $v \not\equiv 0$ .

Welche dieser Lösungen liegen in  $W^{1,2}(\Omega_\Phi)$ ?

Wann sind sämtliche  $W^{1,2}$ -Lösungen dieser Form sogar in  $W^{2,2}(\Omega_\Phi)$ ?

**Nächste Übungsstunde: Mittwoch 27. Juni 2007**