

Übungsblatt 9

Aufgabe 37:

Sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$, $s \in [1, \infty)$. Für $u \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^3$ sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(u, A) = \frac{1}{2} |A|^2 - 1000 |u|^s$.

Man zeige: f ist genau dann schwach unterhalbfolgenstetig auf $W^{1,2}(\Omega)$, wenn $s \in [1, 6)$.

Hinweis: Die Folge $u_k(x) = k \max\{0, 1 - k^2 |x|\}$, $k \in \mathbb{N}$, ist recht interessant.

Aufgabe 38:

Für $v \in W_0^{1,p}((-1, 1))$ sei $I(v) = \int_{-1}^1 |x|^{\frac{1}{2}} |v'(x)|^2 dx$. Man zeige:

$$p < \frac{4}{3} \implies I \text{ ist koerziv auf } W_0^{1,p}(\Omega),$$

$$p > \frac{4}{3} \implies I \text{ ist nicht koerziv auf } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Insbesondere ist I auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ nicht koerziv!

Aufgabe 39: (schriftlich)

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons eines Wasserstoffatoms wird durch die Dichte $\rho : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ mit $\Omega = B(0, R) \subset \mathbb{R}^3$ beschrieben. Setzen wir $\rho(x) = u^2(x)$, so wird die potentielle Energie des Elektrons durch $I_{\text{pot}}(u) = \int_{\Omega} -\frac{\gamma}{|x|} u^2(x) dx$ und die kinetische Energie durch $I_{\text{kin}}(u) = \int_{\Omega} \mu |\nabla u(x)|^2 dx$ beschrieben, wobei μ, γ positive physikalische Konstanten sind. Weise nach, dass das Funktional $I(u) = I_{\text{kin}}(u) + I_{\text{pot}}(u)$ auf $M = \{u \in W^{1,2}(\Omega) : \|u\|_{L^2} = 1\}$ sein Infimum annimmt.

Hinweis: Zeige und verwende $(x \mapsto \frac{1}{|x|}) \in L^2(\Omega)$ und $\|u^2\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{3}{2}}$.

Aufgabe 40: Galerkin Verfahren

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet. $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ sei konvex mit $Df(0) = 0$ und es gebe ein $p \in [2, \infty)$ und Konstanten $c_i > 0$ so dass für alle $A, B \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$|f(A)| \leq c_1(1 + |A|^p) \tag{1}$$

$$|D_A f(A)| \leq c_2(1 + |A|^{p-1}) \tag{2}$$

$$f(B) - f(A) - D_A f(A) \cdot (B - A) \geq c_3 |A - B|^p \tag{3}$$

Beispiel (ohne Beweis): $f(A) = \frac{1}{p} |A|^p$ erfüllt (1)–(3) falls $p \geq 2$.

Sei ferner $V_0 := W_0^{1,p}(\Omega)$ und für $h > 0$ seien $V_h \subset V_0$ endlichdimensionale Teilräume mit $V_{h_1} \subset V_{h_2}$ für $h_1 \geq h_2$ und

$$\overline{\bigcup_{h>0} V_h} = V_0. \tag{4}$$

Für $\ell \in (W^{1,p}(\Omega))'$ sei $I : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$I(v) = \int_{\Omega} f(\nabla u(x)) \, dx - \langle \ell, v \rangle.$$

Wir betrachten folgende Minimierungsaufgaben für $h \geq 0$:

(P₀) Finde $u_0 \in V_0$ mit $I(u_0) \leq I(v)$ für alle $v \in V_0$.

(P_h) Finde $u_h \in V_h$ mit $I(u_h) \leq I(v_h)$ für alle $v_h \in V_h$. ($h > 0$)

Ziel der Aufgabe ist es zu zeigen, dass die Folge der Minimierer der Aufgaben (P_h) für $h \searrow 0$ stark gegen den Minimierer von I auf V_0 konvergiert. Wählt man zum Beispiel für die Räume V_h geeignete Finite-Element-Räume, so folgt (unter der Voraussetzung, dass (P_h) exakt gelöst wird) die Konvergenz des FE-Verfahrens.

Man zeige:

(a) Für alle $h \geq 0$ besitzt die Aufgabe (P_h) eine eindeutige Lösung $u_h \in V_h$.

(b) Für alle $h \geq 0$ löst u_h die schwache Euler-Lagrange Gleichung

$$\int_{\Omega} D_A f(\nabla u_h) \cdot \nabla v_h \, dx = \langle \ell, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h.$$

(c) Aus der Konvexitätsungleichung (3) folgt die Monotonie-Ungleichung

$$(D_A f(B) - D_A f(A)) \cdot (B - A) \geq 2c_3 |A - B|^p.$$

Man benutze die schwachen Euler-Lagrange-Gleichungen und zeige, dass eine Konstante $c > 0$ existiert, so dass für alle $h \geq 0$ und jede Lösung u_h gilt

$$\|u_h\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq c \|\ell\|_{(W^{1,p}(\Omega))'}^{\frac{1}{p-1}}.$$

(d) Man benutze die Euler-Lagrange-Gleichungen und zeige, dass für alle Lösungen u_h und für alle $v_h \in V_h$ gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (D_A f(\nabla u_0) - D_A f(\nabla u_h)) \cdot \nabla (u_0 - u_h) \, dx \\ &= \int_{\Omega} (D_A f(\nabla u_0) - D_A f(\nabla u_h)) \cdot \nabla (u_0 - v_h) \, dx. \end{aligned}$$

Hiermit zeige man folgende Variante des Lemmas von Céa: Es existiert eine Konstante $c > 0$ so dass für alle $h > 0$ folgendes erfüllt ist:

$$\|u_0 - u_h\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p \leq c \inf_{v_h \in V_h} \|u_0 - v_h\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

(e) Man zeige $u_h \rightarrow u_0$ in $W^{1,p}(\Omega)$.

Nächste Übungsstunde: Mittwoch 20. Juni 2007