Variationsrechnung
Sommersemester 2007
Dr. Dorothee Knees
Prof. Alexander Mielke
5. Juni 2007

Übungsblatt 8

Aufgabe 33: Es seien X, Y Banachräume und $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ sei kompakt. Weise nach, dass A jede schwach konvergente Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X in eine stark konvergente Folge $(Au_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Y abbildet.

Aufgabe 34: Untersuche die Folge

$$u_n(x) = \frac{n^\alpha x}{1 + (nx)^3}$$

als Folge in $\mathrm{L}^p((0,1))$, $p \in [1, \infty)$, wobei $\alpha > 0$ ein reeller Parameter sei. Für welche α, p ist die Folge beschränkt bzw. schwach oder stark konvergent? (Die Transformation $y = nx$ könnte hilfreich sein)

Aufgabe 35: Vollständigkeit von $\mathbf{W^{s,p}(\Omega)}$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen.

(a) Zeige, dass $W^{k,p}(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty]$ vollständig ist.
Hinweis: Zeige, dass die Menge

$$L_{k,p}(\Omega) := \Big\{ (v_\alpha)_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d,\\ 0\le|\alpha|\le k}} \in \bigtimes_{0\le|\alpha|\le k} L^p(\Omega) : \exists\, u \in W^{k,p}(\Omega) \text{ mit } v_\alpha = D^\alpha u \Big\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $\bigtimes_{0\le|\alpha|\le k} L^p(\Omega)$ ist.

(b) Für $p \in [1, \infty)$ und $s \in (0, 1)$ zeige man die Vollständigkeit von $W^{s,p}(\Omega)$.

(c) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, $p \in [1, \infty)$, $s \in (0, 1)$. Zeige, dass $W^{1,p}(\Omega)$ stetig in $W^{s,p}(\Omega)$ eingebettet ist.
Hinweis: Ähnliche Argumentation wie im Satz über Differenzenquotienten in $W^{s,p}$.

Aufgabe 36: Schriftlich: Differenzenquotienten für $f \in L^p$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Mit $W^{-1,q}(\Omega)$ bezeichnen wir den Dualraum von $W_0^{1,p}(\Omega)$. Mittels der Abbildung $L^q(\Omega) \to W^{-1,q}(\Omega)$, $f \mapsto \ell_f$ mit $\langle \ell_f, v\rangle = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x$ für $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ kann $L^q(\Omega)$ in $W^{-1,q}(\Omega)$ eingebettet werden.

Zeige: Für jedes $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $f \in L^q(\Omega)$ und $h \in \mathbb{R}^d$ mit $|h| < \mathrm{dist}(\mathrm{supp}\,\varphi, \partial\Omega)$ gilt

$$\|\varphi \triangle_h f\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \le |h|\, \|\varphi\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\, \|f\|_{L^q(\Omega)}\,.$$

Hierbei ist $\triangle_h f(x) = f(x+h) - f(x)$. Beachte: $\|\psi\|_{X'} = \sup_{\theta\in X, \|\theta\|_X = 1} \langle \psi, \theta\rangle$.

Nächste Übungsstunde: Mittwoch 13. Juni 2007