Übungsblatt 7

Aufgabe 28: Sei X ein reflexiver Banachraum und $I : X \to \mathbb{R}_\infty$ konvex, unterhalbstetig und superlinear koerziv, d.h. $\frac{I(u_n)}{\|u_n\|} \to \infty$ für $\|u_n\| \to \infty$.

Man zeige: Für jedes $\ell \in X'$ existiert ein $u \in X$ mit $\ell \in \partial I(u)$.

Aufgabe 29: Seien X ein Banachraum, $u^* \in X$ und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Es gelte folgendes:

(a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist normbeschränkt in X.

(b) $\ell(u_n) \to \ell(u^*)$ für $\ell \in S$, mit $S \subset X'$ und die lineare Hülle von S (endliche Linearkombinationen der Elementen von S) liegt dicht in X'.

Zeige $u_n \rightharpoonup u^*$ in X.

Aufgabe 30: Es seien $X = L^p((0,1))$ mit $p \in [1,\infty)$ und $u \in X$ gegeben. Die Funktion $\widetilde{u}$ sei erklärt durch periodische Erweiterung von u auf $\mathbb{R}$. Die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ sei definiert durch

$$u_n(x) = \widetilde{u}(nx).$$

Zeige, dass $u_n \rightharpoonup u^*$ in X mit $u^*(x) = \int_0^1 u(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ für alle $x \in (0,1)$.
Hinweis: Benutze Aufgabe 29 mit $S = \{1_{[0,\alpha]}, 0 \le \alpha \le 1\}$, wobei $1_{[0,\alpha]}$ die Indikatorfunktion der Menge $[0,\alpha]$ ist, d.h. $1_{[0,\alpha]}(x) = 1$ falls $x \in [0,\alpha]$ und 0 sonst.

Aufgabe 31: Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $|g(u)| \le C(1+u^2)$ gegeben und das Funktional $I : L^2((0,1)) \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $I(u) = \int_0^1 g(u(x))\,\mathrm{d}x$. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) I ist schwach folgenstetig.

(ii) I ist affin, d.h. $I(u) = I(0) + \langle y, u\rangle$ mit $y \in L^2((0,1),\mathbb{R})$.

Hinweis: Verwende Aufgabe 30 und zeige zunächst, dass $I(u) = g(\int_0^1 u\,\mathrm{d}x)$ für alle u. Betrachte dann Folgen u_n mit $u_n(x) \in \{\alpha, \beta\}$ und zeige, dass g konvex und konkav ist.

Aufgabe 32: (schriftlich) Sei $M = [a,b]$ für $a < b \in \mathbb{R}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sei offen. Wir definieren $\mathcal{M} = \{u \in L^2(\Omega,\mathbb{R}) : u(x) \in M \text{ f.ü.}\}$. $\chi_{\mathcal{M}} : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}_\infty$ sei die charakteristische Funktion zu $\mathcal{M}$, d.h. $\chi_{\mathcal{M}}(u) = 0$ falls $u \in \mathcal{M}$ und $\chi_{\mathcal{M}}(u) = \infty$ sonst. Man zeige

(a) $\chi_{\mathcal{M}}$ ist schwach unterhalb folgenstetig auf $L^2(\Omega)$.

(b) $\mathcal{M}$ besitzt keine inneren Punkte.

(c) Man berechne das Subdifferential $\partial\chi_{\mathcal{M}}(u)$ explizit für $u \in L^2(\Omega)$.

(d) Sei $M \subset \mathbb{R}$ nicht leer und $\mathcal{M} = \{u \in L^2(\Omega,\mathbb{R}) : u(x) \in M \text{ f.ü.}\}$. Zeige:
$\mathcal{M}$ ist schwach abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ M ist konvex und abgeschlossen.
Hinweis: Betrachte Folgen $u_k(x) = H(kx)$, $H : \mathbb{R} \to \{\alpha, \beta\}$ und $H(t+1) = H(t)$ und verwende Aufgabe 30.

Nächste Übungsstunde: Mittwoch 6. Juni 2007