Übungsblatt 6

Aufgabe 23:
Seien X ein Banachraum und das Funktional $I : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gegeben. Das Funktional I erfüllt folgende Bedingung: Die Menge S_α definiert durch

$$S_\alpha = \{u \in X : I(u) \leq \alpha\}$$

ist kompakt in X für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$. Folgere, dass I sein Infimum auf X annimmt.

Aufgabe 24: Konvexe Hülle

Definition: *Sei $U \subset X$ und X linearer Raum. Die kleineste konvexe Menge, die U enthält, heißt die konvexe Hülle von U. Diese Menge wird mit $\mathrm{co}U$ bezeichnet. D.h. $\mathrm{co}U = \bigcap_{K\, konvex, U \subset K} K$.*

(a) Zeige, dass $\mathrm{co}U = \{u : u = \sum_{i=1}^{n(u)} \lambda_i u_i,\ n(u) \in \mathbb{N}, u_i \in U, \lambda_i \geq 0 \text{ mit } \sum_{i=1}^{n(x)} \lambda_i = 1\}$.

(b) Weise nach, dass für $U \subset \mathbb{R}^n$ die Zahl $n(x)$ aus (a) immer kleiner oder gleich $n + 1$ gewählt werden kann.

(c) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge in $\mathbb{R}^n$. Zeige die Kompaktheit von $\mathrm{co}U$. Überlege, dass die konvexe Hülle einer abgeschlossenen Menge in $\mathbb{R}^n$ nicht abgeschlossen zu sein braucht.

Aufgabe 25: In $C^0([0,1])$ sei folgende Menge gegeben: $U = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, wobei $u_0 = 0$ und $u_n(x) = \frac{1}{n!\lambda_n} x^n$ mit $\lambda_i > 0$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$. Zeige

(a) Die λ_i können so gewählt werden, dass $U \subset C^0([0,1])$ folgenkompakt ist.

(b) $\mathrm{co}U$ ist nicht abgeschlossen und somit auch nicht kompakt.

Aufgabe 26: Seien X ein reflexiver Banach–Raum, $M \subset X$ gegeben und $u_* \in X \setminus M$. Das Funktional I ist wie folgt definiert

$$I : X \to \mathbb{R}_\infty \,;\, u \mapsto \begin{cases} \|u_* - u\|\,, & u \in M\,, \\ \infty\,, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

(a) Zeige, dass I unterhalb folgenstetig ist, falls M abgeschlossen ist.

(b) Sei M konvex. Zeige, dass I konvex ist.

(c) Sei M konvex und abgeschlossen. Zeige, dass I einen Minimierer besitzt. Finde ein Beispiel in einem endlichdimensionalen Raum, wo der Minimierer nicht eindeutig ist.

(d) Sei $X = \ell^2$ und $M = \{u \in \ell^2 \mid \sum_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{n})u_n^2 = 1\}$. Zeige, dass M abgeschlossen ist und dass $\|u\| > 1$ für alle $u \in M$. Finde $u_* \in X$, so dass I keinen Minimierer besitzt.

Schriftliche Aufgabe auf der Rückseite

Aufgabe 27: Schriftlich

Es sei X ein Banachraum. Das Funktional $I : X \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $I(u) = B(u,u) + l(u)$, mit $l \in X'$ und $B : X \times X \to \mathbb{R}$ sei eine symmetrische Bilinearform mit $\frac{1}{C}\|u\|^2 \leq B(u,u) \leq C\|u\|^2$ für ein $C > 0$.

(a) Zeige, dass I konvex ist und dass $\gamma = \inf\{I(u) : u \in X\} \geq -C\frac{\|l\|^2}{4}$.

(b) Beweise die Identität $B(u-v, u-v) = 4\big(\frac{1}{2}I(u) + \frac{1}{2}I(v) - I(\frac{u}{2} + \frac{v}{2})\big)$.

(c) Es gelte $I(u), I(v) \leq \gamma + \delta$. Folgere mit (b) die Abschätzung $\|u-v\|^2 \leq 4C\delta$.

(d) Es sei nun (u_n) eine infimierende Folge, d.h. $I(u_n) \to \gamma$. Zeige, dass (u_n) konvergiert und dass der Grenzwert u^* die Beziehung $I(u^*) = \gamma$ erfüllt.

Nächste Übungsstunde: Mittwoch 30. Mai 2007