

Übungsblatt 5

Definitionen. Es sei $f : \mathbb{R}^{m \times d} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

(a) f heißt *konvex im Punkt* A_0 , falls ein $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times d}$ existiert mit $f(B) \geq f(A_0) + \Sigma : (B - A_0)$ für alle $B \in \mathbb{R}^{m \times d}$. f heißt *konvex*, falls es in jedem Punkt konvex ist.

(b) f heißt *quasikonvex im Punkt* A_0 , falls $\int_{B_1(0)} f(A_0 + \nabla w(y)) dy \geq f(A_0) \int_{B_1(0)} 1 dy$ für alle $w \in C_0^1(\overline{B_1(0)}; \mathbb{R}^m)$ gilt. f heißt *quasikonvex*, falls es in jedem Punkt quasikonvex ist.

(c) f heißt *Rang-1-konvex im Punkt* A_0 , falls ein $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times d}$ existiert, so dass $f(A_0 + \xi \otimes \eta) \geq f(A_0) + \Sigma : (\xi \otimes \eta)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^m$ und alle $\eta \in \mathbb{R}^d$ gilt. f heißt *Rang-1-konvex*, falls es in jedem Punkt konvex ist.

Aufgabe 18: Konvexität. Es sei $V = \mathbb{R}^{m \times d}$ und $f : V \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) Zeige, dass f genau dann konvex ist, wenn für alle $\lambda \in (0, 1)$ und $A, B \in V$ die Abschätzung $f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1-\lambda)f(B)$ gilt.

(b) Es sei nun zusätzlich $f \in C^1(V)$. Zeige, dass (b1), (b2) und (b3) äquivalent sind:

(b1) f is konvex,

(b2) $\forall A, B \in V: f(B) \geq f(A) + \partial_A f(A) : (B - A)$,

(b3) $\forall A_1, A_2 \in V: (\partial_A f(A_1) - \partial_A f(A_2)) : (A_1 - A_2) \geq 0$.

(c) Es sei nun sogar $f \in C^2$. Zeige, dass f genau dann konvex ist, wenn für alle $A \in V$ die Hesse-Matrix $\partial_A^2 f(A)$ positive semi-definit ist, d.h. $D^2 f(A)[B, B] \geq 0$ für alle $B \in V$.

Aufgabe 19: [Schriftlich] Stetigkeit und Konvexität.

Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein endlichdimensionaler normierter Vektorraum. Die Definition von Konvexität einer Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sei nun definiert durch $f(\lambda v + (1-\lambda)w) \leq \lambda f(v) + (1-\lambda)f(w)$ für alle $\lambda \in (0, 1)$ und alle $v, w \in V$.

(a) Zeige, dass jede konvexe Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lokal LIPSCHITZ-stetig ist. Zu einem Intervall $B_R(x_0) = (x_0 - R, x_0 + R)$ betrachte dazu $s_{2R} = \sup\{f(x) \mid x \in B_{2R}(x_0)\}$ und $i_{2R} = \inf\{f(x) \mid x \in B_{2R}(x_0)\}$. Durch Verwendung geeigneter Tangenten kann dann für $x_1, x_2 \in B_R(x_0)$ die Abschätzung $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\|x_1 - x_2\|}{R}(s_{2R} - i_{2R})$ gezeigt werden.

(b) Zeige nun, dass auch jede konvexe Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig ist.

(c) Konstruiere ein Beispiel einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, die konvex aber nicht stetig ist.

(d) Konstruiere ein Beispiel einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\infty$, die konvex und stetig ist und sowohl Werte in \mathbb{R} als auch $+\infty$ annimmt.

(e) Finde einen BANACH-Raum X und ein konvexes Funktional $I : X \rightarrow [0, \infty]$, das in keinem Punkt stetig ist.

(bitte wenden)

Aufgabe 20: Quasi- und Rang-1-Konvexität. Es sei $f : \mathbb{R}^{m \times d} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben.

(a) Zeige, dass f genau dann Rang-1-konvex ist, wenn für alle $\lambda \in (0, 1)$, $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$, $\xi \in \mathbb{R}^m$ und $\eta \in \mathbb{R}^d$ die Abschätzung $f(A + \lambda\xi \otimes \eta) \leq (1-\lambda)f(A) + \lambda f(A + \xi \otimes \eta)$ gilt.

(b) Für gegebene $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\eta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $\lambda \in (0, 1)$ und $\varepsilon > 0$ konstruiere eine Funktion $\widehat{w}_\varepsilon \in PC^1(B_1(0); \mathbb{R}^m)$ mit der Eigenschaft, dass $\nabla \widehat{w}_\varepsilon(y)$ fast überall nur die beiden Werte $R_1 = -\lambda\xi \otimes \eta$ und $R_2 = (1-\lambda)\xi \otimes \eta$ annimmt und dass $\|\widehat{w}_\varepsilon\|_{C^0} \leq \varepsilon|\xi||\eta|$ gilt. (Hinweis: feines Wellblech).

(c) Setze nun $w_\varepsilon(y) = \chi_\varepsilon(y)\widehat{w}_\varepsilon(y)$ mit $\chi_\varepsilon(y) = \min\{1, (1-|y|)/\varepsilon\}$. Zeige, dass $\|\nabla w_\varepsilon\|_{L^\infty}$ unabhängig von ε beschränkt bleibt und dass das LEBESGUE-Maß der Mengen $\Omega_j^\varepsilon = \{y \in B_1(0) \mid \nabla w_\varepsilon(y) = R_j\}$ gegeben $(1-\lambda)|B_1(0)|$ bzw. $\lambda|B_1(0)|$ strebt.

(d) Folgere, dass die Quasikonvexität von f die Rang-1-Konvexität von f impliziert.

Aufgabe 21: Lokale Minimierer und die WEIERSTRASSSchen Bedingungen.

Für $k, b > 0$ sei das Funktional

$$I(u) = \int_0^1 (ku'(x)^2 - 4\rho u(x)u'(x)^3 + 2\rho xu'(x)^4) dx$$

auf $X_0 = \{u \in PC^1([0, 1]) \mid u(0) = 0\}$ gegeben.

(a) Stelle die EULER-LAGRANGE-Gleichung auf und zeige, dass $u_0 \equiv 0$ ein kritischer Punkt ist.

(b) Zeige dass u_0 ein strikter schwacher lokaler Minimierer ist. (Hinweis: $f(x, u, u') \geq \frac{k}{2}(u')^2$ für $|u|, |u'| \leq \varepsilon$.)

(c) Stelle die WEIERSTRASSSche Exzess-Funktion auf und prüfe ob die notwendige bzw. die hinreichende Bedingung erfüllt ist.

(d) Entscheide, ob ein starker lokaler Minimierer vorliegt.

Aufgabe 22: JENSENSche Ungleichung. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ konvex.

(a) Weise nach, dass $f(q_1u_1 + q_2u_2 + \dots + q_nu_n) \leq q_1f(u_1) + q_2f(u_2) + \dots + q_nf(u_n)$ gilt, falls $q_i \geq 0$ für alle i und $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$ ist.

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und u eine skalare stückweise konstante Funktion auf Ω mit Werten in V . Zeige

$$f\left(\frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_\Omega u(x) dx\right) \leq \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_\Omega f(u(x)) dx.$$

(c) Folgere, dass (b) auch für $u \in C^0(\overline{\Omega}; V)$ bzw. $u \in L^1(\Omega; V)$ gilt.

Nächste Übungsstunde: Mittwoch 23. Mai 2007