Übungsblatt 4

Aufgabe 14: Lokale Extremierer.
Seien die Menge $M = \mathrm{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, die Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und das Funktional $I : M \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$I(u) = \int_a^b g(u'(x)) + h(u(x))\,\mathrm{d}x$$

gegeben.

(a) Stelle die Euler–Lagrange-Gleichung auf. Unter welchen Bedingungen auf g, h besitzt die Euler–Lagrange–Gleichung die Lösungen von der Form $u(x) = u^* = \mathrm{const}$.

(b) Sei $u(x) = u^* = \mathrm{const}$ eine stationäre Lösung der Euler–Lagrange–Gleichung. Beweise, dass $h''(u^*) > 0$ und $g''(0) > 0$ eine hinreichende Bedingung für strikte schwache lokale Minimierer des Funktionals I im Punkte u^* ist.

(c) Es gelte nun $g(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ und $g(0) = 0$. Sei u^0 ein lokales Minimum der Funktion h. Zeige, dass die konstante Lösung $u(x) = u^0$ ein starker lokaler Minimierer des Funktionals I ist. Unter welchen Bedingungen ist $u(x) = u^0$ ein globaler Minimierer?

(d) Es sei nun $M = \mathrm{C}_0^1([a,b];R)$, $g(A) = \frac{1}{2}A^2$ und $h(u) = \frac{c}{2}u^2 + \frac{1}{4}u^4$. Zeige, dass es ein $c < 0$ gibt, so dass $u(x) = u^0 = 0$ ein strikter lokaler Minimierer ist, obwohl dann $h''(0) = c < 0$ gilt.

Aufgabe 15: Positivität der zweiten Variation. Seien das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, und das Funktional $I : \mathrm{C}^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ definiert durch $I(u) = \int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))\,\mathrm{d}x$ gegeben. Weiter gebe es $\gamma_1,\ \gamma_2 > 0,\ C \geq 0$, so dass für alle $w \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)$ gilt:

$$\int_\Omega \mathrm{D}_A^2 f(x,u_0(x),\nabla u_0(x))[\nabla w,\nabla w]\,\mathrm{d}x \ \geq\ \gamma_1 \int_\Omega |\nabla w|^2\,\mathrm{d}x - C\int_\Omega |w|^2\,\mathrm{d}x, \qquad (1)$$

$$\mathrm{D^2I(u_0)[w,w]} \ \geq\ \gamma_2 \int_\Omega |w|^2\,\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

(a) Folgere aus (1) durch Abschätzen von $\partial_A\partial_u f$ und $\partial_u^2 f$ die Ungleichung $\mathrm{D}^2 I(u_0)[w,w] \geq \gamma_1 \int_\Omega |\nabla w|^2\,\mathrm{d}x - \widehat{C}\int_\Omega |w|^2 + |\nabla w||w|\,\mathrm{d}x$ mit geeignetem $\widehat{C}$.

(b) Schließe aus (a) mittels der CAUCHY–SCHWARZ-Abschätzung, dass $\mathrm{D}^2 I(u_0)[w,w] \geq \frac{\gamma_1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2\,\mathrm{d}x - C^*\int_\Omega |w|^2\,\mathrm{d}x$ mit geeignetem C^* gilt.

(c) Finde mittels (2) und (b) $\gamma_3 > 0$, so dass $\mathrm{D}^2 I(u_0)[w,w] \geq \gamma_3 \int_\Omega |\nabla w|^2 + |w|^2\,\mathrm{d}x$ gilt.

(bitte wenden)

Aufgabe 16: LEGENDRE-HADAMARD**-Bedingung und Konvexität.**
Es sei $\Omega = (-1,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ und $f_c(A) = cA{:}A + \det A$ mit $c \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimme alle $c \in \mathbb{R}$, für die f_c die LEGENDRE-HADAMARD-Bedingung in 0 erfüllt.

(b) Zeige, dass für alle c aus (a) auch die LEGENDRE-HADAMARD-Bedingung im jedem Punkte $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ erfüllt ist.

(c) Bestimme alle $c \in \mathbb{R}$, so dass $f_c : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ konvex ist.

(d) Gebe ein $c > 0$ und eine Funktion $u \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ an, so dass $\int_\Omega f_c(\nabla u(x))\,\mathrm{d}x < 0$ ist.

Aufgabe 17: (schriftlich) Anisotrope Elastizitätstheorie.
Geben sei die Energiedichte $f : \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(A) = \frac{\lambda}{2}(\mathrm{Spur}A)^2 + \frac{\mu}{4}\left|A + A^{\mathsf{T}}\right|^2 + \frac{\delta}{2}A_{11}^2,$$

wobei $\mathrm{Spur}A = \sum_{i=1}^d A_{ii}$ und $|\widetilde{A}|^2 = \sum_{i,j=1}^d \widetilde{A}_{ij}^2$ gelte.

(a) Zeige, dass $\partial_A^2 f(A)[B,B] = 2f(B)$ für alle $A, B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ gilt.

(b) Wann ist die LEGENDRE–HADAMARD–Bedingung erfüllt? Versuche zuerst eine Antwort für $d = 2$ zu geben. (*Hinweis:* Der Ausdruck $\partial_A^2 f(A)[\xi\otimes\eta, \xi\otimes\eta]$ kann in der Form $M(\eta)\xi\cdot\xi$ mit $M(\eta) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ geschrieben werden.)

(c) Für welche $\lambda, \mu, \delta \in \mathbb{R}$ gilt $f(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$? Versuche zuerst eine Antwort für $d = 2$ zu geben. (*Hinweis:* Beim Testen kann man sich im Wesentlichen auf diagonale Matrizen beschränken.)

(d) Unter welchen Bedingungen ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{R}$ konvex?

Nächste Übungsstunde: Mittwoch 16. Mai 2007