# Übungsblatt 3

**Aufgabe 10: Klassische Mechanik**

In der LAGRANGE'schen Mechanik betrachten wir ein Funktional aus Kinetischer Energie minus potentieller Energie:

$$\mathcal{L}(t,q,\dot{q}) = \mathcal{K}(q,\dot{q}) - \mathcal{U}(t,q) \qquad \text{mit } \mathcal{K}(q,v) = \frac{1}{2}(M(q)v)\cdot v.$$

(a) Leite die EULER-LAGRANGE-Gleichungen für $I(q) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t,q(t),\dot{q}(t))\,\mathrm{d}t$ her und zeige deren Äquivalenz zu den NEWTON'schen Gleichungen (Impulsänderung = Kraft).

(b) Wann ist die Energie $\mathcal{E}(t,q,\dot{q}) = \mathcal{K}(q,\dot{q}) + \mathcal{U}(t,q)$ entlang von Lösungen konstant?

(c) Es sei $w \in \mathbb{R}^m$ eine Richtung für die $\mathrm{D}_q\mathcal{U}(t,q)[w] = 0$ für alle $(t,q) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ gilt. Folgere, dass der Impuls in $w$-Richtung konstant entlang von Lösungen ist.

**Aufgabe 11: Rotationssymmetrische mechanische Probleme**

Es sei $\mathcal{L} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine LAGRANGE-Funktion mit Rotationssymmetrie:

$$\exists\,\omega \in \mathbb{R}^{m\times m} \text{ mit } \omega^{\mathsf{T}} = -\omega\text{: } \mathcal{L}(t, \mathrm{e}^{s\omega}q, \mathrm{e}^{s\omega}\dot{q}) = \mathcal{L}(t,q,\dot{q}) \text{ für alle } t,s \in \mathbb{R} \text{ und } q,\dot{q} \in \mathbb{R}^m.$$

Für $\omega^{\mathsf{T}} = -\omega$ ist $R(s) = \mathrm{e}^{s\omega} = \sum_0^\infty \frac{1}{n!}(s\omega)^n$ eine Rotationsmatrix, d.h. $R(s)^{\mathsf{T}}R(s) = I$.

(a) Folgere, dass die Identität $\mathrm{D}_q\mathcal{L}(t,q,A)[\omega q] + \mathrm{D}_A\mathcal{L}(t,q,A)[\omega A] = 0$ gilt.

(b) Unter Verwendung der EULER-LAGRANGE-Gleichung zeige nun, dass der zugehörige Drehimpuls $J_\omega(t,q,\dot{q}) = \mathrm{D}_A\mathcal{L}(t,q,\dot{q})[\omega q]$ entlang von Lösungen konstant ist.

(c) Das Ergebnis von (b) soll für alle kritischen Punkte gezeigt werden, ohne die EULER-LAGRANGE-Gleichungen zu verwenden. Betrachte dazu $\mathrm{D}I(q)[v] = 0$ mit $I$ wie in der obigen Aufgabe und mit $v(t) = s(t)\omega q(t)$, $s \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$.

(d) Betrachte das KEPLER-Problem mit $\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{m}{2}|\dot{q}|^2 - \frac{GMm}{|q|}$ und bestimme alle möglichen Drehimpulserhaltungen.

**Aufgabe 12: Minimierungsproblem auf $\mathbb{R}$**

Gegeben sei der Funktionenraum $X = \{\, u \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}) \mid \lim_{x\to\pm\infty} u(x) = \pm 1 \,\}$ und das Funktional $I : X \to \mathbb{R}$ mit

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{2}u'(x)^2 + \tfrac{1}{2}W(u(x))\,\mathrm{d}x \qquad \text{mit } W(u) = (u-1)^2u^2(u+1)^2\,.$$

(a) Zeige $I(u) \geq \int_{-1}^{1}\sqrt{W(u)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. *Hinweis:* Verwende die Ungleichung $a^2+b^2 \geq 2|a||b|$.

(b) Stellen die EULER–LAGRANGE-Gleichung des Problems auf, und diskutiere die Bedingungen unter denen sich $a^2+b^b \geq 2|a||b|$ in eine Gleichung verwandelt.

(c) Bestimme die Lösung der EULER–LAGRANGE-Gleichung. Skizziere das Phasenbild der Lösung, und diskutiere das Verhalten der Lösung in der Nähe des Nullpunktes.

(d) Zeige, dass das Variationsproblem keinen Minimierer besitzt.

(bitte wenden)

**Aufgabe 13: [Schriftlich] Rotationskörper mit minimaler Oberfläche**
Betrachte $I : M \to \mathbb{R}$ mit

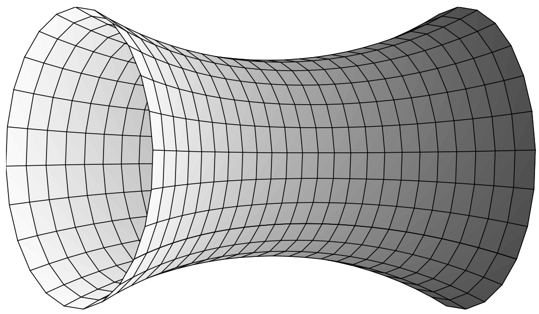
$$I(u) = \int_0^\ell 2\pi u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}\,\mathrm{d}x,\ \ M = \{\, u \in \mathrm{C}^1([0,\ell]) \mid u(x) \geq 0,\ u(0) = r_0,\ u(\ell) = r_\ell \,\}.$$

Alle Lösungen der EULER–LAGRANGE-Gleichung haben die Form $u(x) = U(c, d, x) = c\cosh\left(\frac{x-d}{c}\right)$.

(a) Betrachte den Fall $r_0 = r_\ell$ und zeige, dass stets $d = \ell/2$ gewählt werden kann. Betrachte nun $c$ als freien Parameter, der sowohl $\ell$ als auch die Lösung bestimmt. Diskutiere die Anzahl der Lösungen für verschiedene Werte von $\ell$. Zeichne (numerisch) die Oberfläche der so entstehenden Minimalfläche in Abhängigkeit von $c$ beziehungsweise von $\ell$.

(b) Es sei nun $r_0 > 0$ und $r_\ell > 0$ beliebig. Zeige durch Wahl einer geeigneten Folge, dass stets $i(r_0, r_1, \ell) := \inf\{\, I(u) \mid u \in M \,\} \leq \pi(r_0^2+r_\ell^2)$ gilt. Vergleiche mit (a).

(c) Schätze im Falle $r_0 = r_\ell$ das Infimum $i(r_0, r_0, \ell)$ möglichst gut nach unten ab. Benutze dazu $u_\mathrm{m} = \min\{\, u(x) \mid x \in [0, \ell] \,\}$ und dass $\sqrt{1 + u'^2}$ sowohl durch 1 als auch durch $|u'|$ abgeschätzt werden kann. (Hinweis: $|u'|\,\mathrm{d}x = |\mathrm{d}u|$.)



**Nächste Übungsstunde: Mittwoch 9. Mai 2007**