

## Übungsblatt 2

### Aufgabe 6: Lemma von DU BOIS-REIMOND

Es sei  $T = \{v \in C^1([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^m) \mid v(\alpha) = v(\beta) = 0\}$ .

(a) Für beliebiges  $g \in C^0([\alpha, \beta], \mathbb{R}^m)$  zeige, dass aus

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x) \cdot v'(x) dx = 0 \quad \text{für alle } v \in T$$

folgt, dass  $g$  auf  $[\alpha, \beta]$  konstant ist. (Konstruiere  $v \in T$  mit  $v'(x) = g - \frac{1}{\beta-\alpha} \int_{\alpha}^{\beta} g(\xi) d\xi$ .)

(b) Es seien die Funktionen  $g, f \in C^0([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^m)$  gegeben und es gelte

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) \cdot v(x) + g(x) \cdot v'(x)] dx = 0 \quad \text{für alle } v \in T.$$

Folgere  $g \in C^1([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^m)$  und  $g'(x) = f(x)$  für alle  $x \in [\alpha, \beta]$  gilt.

### Aufgabe 7: Explizit lösbare Probleme

(a) Stelle für die Menge  $M = \{u \in C^1([0, \pi]) \mid u(0) = 0\}$  und das Funktional  $I : M \rightarrow \mathbb{R}$ ;

$$I(u) = \int_0^{\pi} [(u'(x))^2 + 2u(x) \cos(x) + x^{27}] dx + 4u(\pi),$$

die Euler-Lagrange-Gleichung auf und bestimme die kritischen Punkte.

(b) Bestimme mittels der klassischen Methode der Variationsrechnung alle kritischen Punkte von  $I(u) = \int_1^2 x^3 (u'(x))^2 dx$  unter den Randbedingungen  $u(1) = 0, u(2) = 3$ . Welche Extremaleigenschaften haben diese kritischen Punkte.

**Aufgabe 8: EULER-LAGRANGE-Gleichung:** Seien das Gebiet  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  und die Menge  $M = \{u \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \mid u|_{\partial\Omega} \equiv 0\}$  und das Funktional  $I(u) : M \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$I(u) = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \left( \nabla u(x) \cdot \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \nabla u(x) + \lambda u^2 \right) - \frac{1}{3} u^3 \right] dx$$

gegeben. Stellen Sie die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung auf.

**Aufgabe 9: Vektoranalysis und der ESHELBY-Tensor** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein Gebiet.

(a) Für die Tensorfelder  $A \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^{m \times d})$  und  $B \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^{n \times m})$  zeige die Produktregel

$$\operatorname{div}(BA) = C:A + B \operatorname{div} A \quad \text{mit } (C:A)_{\nu} = \sum_{\mu=1}^m \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} B_{\nu\mu} A_{\mu j}.$$

(b) Für eine Dichte  $f \in C^2(\Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d})$  ist der

$$\text{ESHELBY-Tensor } \mathbb{E}(x, u, A) = A^{\top} \partial_A f(x, u, A) - f(x, u, A) I_d \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

definiert. Zeige, dass Lösungen  $u \in C^2(\Omega)$  der zu  $f$  gehörigen EULER-LAGRANGE-Gleichung folgende Beziehung erfüllen:

$$\operatorname{div} \mathbb{E}(\cdot, u, \nabla u)(x) + \partial_x f(x, u(x), \nabla u(x)) = 0 \in \mathbb{R}^d.$$

**Nächste Übungsstunde: Mittwoch 2. Mai 2007**