Übungsblatt 1

Aufgabe 1: Lineare Algebra. Sei $I(u) = \frac{1}{2}\langle u, Au\rangle - \langle b, u\rangle$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b, u \in \mathbb{R}^n$, und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt.

(a) Zeige, dass u genau dann ein kritischer Punkt von I ist, wenn $\frac{1}{2}(A + A^\mathsf{T})u = b$ ist.

(b) Nimmt I sein Infimum an, falls A symmetrisch und positiv definit ist?

(c) Es sei A symmetrisch und positiv semidefinit. Unter welchen Bedingungen an b ist $\inf I > -\infty$? Gilt dann $\inf I = \min I$?

Aufgabe 2: Vektoranalysis.

(a) Beweisen Sie, dass eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nur dann ein Extremum im Punkt $x^0 \in \mathbb{R}^n$ besitzt, wenn x^0 ein kritischer Punkt von f ist, d.h. $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x^0) = 0$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$.

(b) Sei $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ein kritischer Punkt einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Zeige, dass die Funktion f im Punkt x^0 ein lokales Minimum (bzw. Maximum) in x^0 hat, wenn das zweite Differential, d.h. die quadratische Form $\langle H(x^0)w, w\rangle = \sum_{1\le i,j\le n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x^0)\, w_i w_j$, positiv (bzw. negativ) definit ist ($H(x^0) =$ Hesse-Matrix).

Aufgabe 3: Extrema ohne Differenzierbarkeit. Gegeben sei die Funktionenschar

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \alpha & \text{für} \quad x = 0; \\ \frac{\beta x^2}{1+x^2} & \text{für} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Geben Sie die Extrema (lokale/globale Maxima und Minima) der Funktion $f_{\alpha,\beta}$ sowie das Infimum und Supremum in Abhängigkeit der Parameterwerte an.

Aufgabe 4: Das Beispiel von W**EIERSTRASS:** Gegeben sei das Funktional

$$I : M \to \mathbb{R}, u \mapsto \int_{-1}^{1} [xu'(x)]^2 \,\mathrm{d}x \text{ mit } M = \{\, u \in \mathrm{C}^1([-1, 1]) \mid u(-1) = -1,\ u(1) = 1 \,\}.$$

Zeige, dass für jede Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $I(u_k) \to 0$ auf kompakten Teilmengen von $[-1, 0) \cup (0, 1]$ gleichmäßgie Konvergenz gegen $u_* : x \mapsto \mathrm{sign}(x)$ vorliegt.

Für $x > 0$ schätze dazu $|1-u(x)| = |\int_x^1 u'(s)\,\mathrm{d}s|$ durch $\sqrt{\alpha}C(x)$ ab, wobei $\alpha = I(u)$ und $C \in \mathrm{C}^0((0, 1])$ sind. Hinweis: Setze $a(x) = [xu'(x)]^2$ und verwende $\int_{-1}^{1} a(s)\,\mathrm{d}s = \alpha$.

Aufgabe 5: Ein Beispiel ohne Minimierer. Im Folgenraum ℓ^2 mit Norm $\|(u_n)_n\|_2 = \big(\sum_1^\infty u_n^2\big)^{1/2}$ ist Funktional $I : l^2 \to \mathbb{R}$ durch $I(u) = (1 - \|u\|_2^2)^2 + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} u_n^2$ definiert.

(a) Zeige, dass I stetig ist und dass $I(u) > 0$ für alle $u \in \ell^2$ gilt.

(b) Überprüfen Sie durch Konstruktion einer geeigneten infimierenden Folge, dass das Infimum des Funktionals I gleich 0 ist.

Erste Übungsstunde: Mittwoch 25. April 2007