Übungsblatt 11

Aufgabe 31: Eindimensionale, homogene Wellengleichung: $u_{tt} = u_{xx}$.

(a) Es seien A, B, C, D die Ecken eines beliebigen Rechtecks in der (t, x)-Ebene, dessen Seiten parallel zu den Winkelhalbierenden sind. Zeige, dass für jede Lösung die folgende Beziehung gilt:

$$u(A) - u(B) + u(C) - u(D) = 0.$$

(b) Zeige, dass unter Verwendung von (a) die gesamte Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx} \text{ für } (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega, \\ &u(0, x) = u_0,\ u_t(0, x) = u_1(x) \text{ für } x \in \overline{\Omega}, \quad u(t, \pm 1) = 0 \text{ für } t \geq 0 \end{aligned}$$

auf $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}^1$ konstruiert werden kann.
Hinweis: Im Dreieck zwischen $(0, -1)$, $(0, 1)$ und $(1, 0)$ gilt die d'Alembertsche Formel.

(c) Gebe für $u_1 \equiv 0$ und $u_0(x) = 1-|x|$ die Lösung explizit an.

Aufgabe 32: Quadratische Membran. Wir betrachten auf dem Quadrat $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$ die Wellengleichung $u_{tt} = \Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2}$ mit Dirichlet-Randbedingungen $u(t, \cdot)|_{\partial\Omega} = 0$.

(a) Gebe ein vollständiges Orthonormalsystem $\{ \Phi_j | j \in \mathbb{N} \}$ von $\mathrm{L}^2(\Omega)$ an, so dass $u(t, x) = \cos(\omega_j t)\Phi_j(x)$ mit geeignetem ω_j eine Lösung der Wellengleichung liefert.

(b) Zeige, dass für $\omega^2 = 10$ zwei verschiedene Eigenfunktionen Φ_i und Φ_j existieren, so dass : $\Phi_i(x_1, x_2) = \Phi_j(x_2, x_1) \neq \Phi_j(x_1, x_2)$ auf Ω gilt. Diskutiere die Knotenlinien (= Nullstellen) der Lösung $u(t, \cdot) = \cos(\sqrt{10}\, t)\big(\alpha\Phi_i + \beta\Phi_j\big)$. Betrachte insbesondere die Fälle $\alpha/\beta \in \{\infty, 1, -1, 0\}$.

Aufgabe 33: Das Ganzraumproblem und Fourier-Transformation. Betrachte $u_{tt} = \Delta u$ für $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ mit $u(0, \cdot) = u_0 \in \mathrm{H}^k(\mathbb{R}^d)$, $u_t(0, \cdot) = u_1 \in \mathrm{H}^{k-1}(\mathbb{R}^d)$, $k \in \mathbb{N}$.

(a) Zeige, dass die räumliche Fourier-Transformierte $\widehat{u}(t, \cdot) = \mathcal{F}u(t, \cdot)$ die gewöhnliche Differentialgleichung $\widehat{u}_{tt}(t, \xi) = -|\xi|^2 \widehat{u}(t, \xi)$, $\widehat{u}(0, \xi) = \widehat{u}_0(\xi)$, $\widehat{u}_t(0, \xi) = \widehat{u}_1(\xi)$ löst. Gebe die Lösung explizit an.

(b) Zeige durch Rücktransformation, dass $u(t, \cdot) \in \mathrm{H}^k(\mathbb{R}^d)$ und $u_t(, \cdot) \in \mathrm{H}^{k-1}(\mathbb{R}^d)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Benutze die Charakterisierung von H^k im Fourier-Raum.

(c) Folgere weiter $u \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}, \mathrm{H}^k(\mathbb{R}^d)) \cap \mathrm{C}^1(\mathbb{R}, \mathrm{H}^{k-1}(\mathbb{R}^d))$.

Seminar "Einführung in die Variationsrechnung" (WiSe 2006/07)
Vorbesprechung Dienstag, 18. Juli 2006, 11:00 Uhr, Raum 2.104