

Übungsblatt 10

Aufgabe 29: Das Lemma von CEA. Es sei H ein HILBERT-Raum und $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ ein symmetrische, stetige und koerzitive Bilinearform, d.h. es existieren $c_0, C_1 > 0$, so dass für alle $u, v \in H$ gilt:

$$B(u, v) = B(v, u), \quad |B(u, v)| \leq C_1 \|u\| \|v\|, \quad B(u, u) \geq c_0 \|u\|^2.$$

Weiter sei $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ eine Linearform (stetige lineare Abbildung).

(a) Es sei nun V ein abgeschlossener Unterraum von H . Zeige dass das folgende schwache Problem eine eindeutige Lösung hat:

$$\text{Finde } v \in V, \text{ so dass } \forall \tilde{v} \in V: B(v, \tilde{v}) = F(\tilde{v}).$$

Zeige weiter die Abschätzung $\|v\| \leq \|F\|_{H^*} / c_0$.

(b) Es sei $u \in H$ die Lösung von $B(u, \tilde{u}) = F(\tilde{u})$ für alle $\tilde{u} \in H$. Leite für die Lösung v aus (a) folgende Beziehung her:

$$\forall w \in V: B(u-w, u-w) = B(v-w, v-w) + B(u-v, u-v).$$

Verwende dazu $u-w = u-v + v-w$ und betrachte $B(u-v, v-w)$.

(c) Folgere die Abschätzung des CEA-Lemmas: $\|u-v\| \leq (C_1/c_0)^{1/2} \min\{\|u-w\| \mid w \in V\}$.

Aufgabe 30: GALERKIN-Verfahren für eine parabolische Gleichung.

Betrachte auf $\Omega = (0, \pi)$ das eindimensionale parabolische Problem

$$\partial_t u(t, x) = (Au(t, \cdot))(x) \quad \text{mit} \quad (A\tilde{u})(x) = \partial_x(a(x)\partial_x\tilde{u}(x)) + b(x)\partial_x\tilde{u}(x) + c(x)\tilde{u}.$$

Zusätzlich sind DIRICHLET-Randbedingungen $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ und die Anfangsbedingung $u(0, x) = u_0(x)$ mit $u_0 \in L^2(\Omega)$ gegeben. Dabei seien $a, b, c \in C^1([0, \pi])$ mit $a_0 := \min\{a(x) \mid x \in [0, \pi]\} > 0$.

(a) Gebe ein $k \in \mathbb{R}$ an, so dass für alle $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ die folgende Abschätzung gilt:

$$\langle Au, u \rangle_{L^2} := \int_{\Omega} (Au)u \, dx \leq -\frac{a_0}{2} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + k \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

(b) Betrachte das vollständige ONS $\{\phi_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ mit $\phi_j(x) = (2/\pi)^{1/2} \sin(jx)$ und definiere für $N \in \mathbb{N}$ die GALERKIN-Matrix $M_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ mittels $M_{N,ij} = \langle A\phi_j, \phi_i \rangle$. Folgere $\langle M_N \alpha^N, \alpha^N \rangle_{\mathbb{R}^N} \leq k |\alpha^N|^2$ für alle $\alpha^N \in \mathbb{R}^n$.

(c) Es sei nun $u^N(t, x) = \sum_1^N \alpha^N(t) \phi_j(x)$ die GALERKIN-Lösung, d.h. $\dot{\alpha}^N = M_N \alpha^N$ und $\alpha_j^N(0) = \langle u_0, \phi_j \rangle_{L^2}$. Zeige die Abschätzung $\|u^N(t)\|_{L^2} \leq e^{kt} \|u_0\|_{L^2}$ für $t \geq 0$ und $N \in \mathbb{N}$.

(d) Gebe eine von N unabhängige Abschätzung für $\int_0^T \int_{\Omega} \partial_x u^N(t, x)^2 \, dx \, dt$ an. (Die obere Schranke sollte nur von T, a, b, c und $\|u_0\|_{L^2}$ abhängen.)