Übungsblatt 9

Aufgabe 25: WIRTINGER–**Ungleichung.** Für alle beschränkten Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (zusammenhängend!) mit LIPSCHITZ-Rand gilt die WIRTINGER-Ungleichung

$$\exists\, C > 0\ \forall\, u \in \mathrm{H}^1(\Omega) \text{ mit } \int_\Omega u \,\mathrm{d}x = 0: \quad \int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x \le C \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Das kleinste C heißt WIRTINGER-Konstante C_{Wirt} des Gebiets Ω.

(a) Untersuche den Fall $\Omega = (0,\ell) \subset \mathbb{R}^1$ mittels von Cosinus-Reihen und bestimme die WIRTINGER-Konstante C_{Wirt} explizit.

(b) Betrachte nun $\Omega = \Pi_{j=1}^d (0,\ell_j) \subset \mathbb{R}^d$ und bestimme wiederum C_{Wirt} explizit.

(c) Es seien nun Ω und $\widetilde{\Omega}$ zwei Gebiete mit WIRTINGER-Konstanten $C_{\mathrm{Wirt}}(\Omega)$ bzw. $C_{\mathrm{Wirt}}(\widetilde{\Omega})$. Weiter sei $\Phi : \Omega \to \widetilde{\Omega}$ eine C^1–Abbildung, die Ω bijektiv auf $\widetilde{\Omega}$ abgebildet. Dabei gelte

$$\det \mathrm{D}\Phi(x) \equiv c \quad \text{und} \quad |\mathrm{D}\Phi(x)| \le M \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Zeige $C_{\mathrm{Wirt}}(\widetilde{\Omega}) \le M^2 C_{\mathrm{Wirt}}(\Omega)$.

(d) Betrachte das folgende "fraktale" Gebiet Ω:

$$\Omega =]0,3[\times]-1,0[\ \cup\ \textstyle\sum_{j=1}^\infty \Big(\big]\frac{3}{2^j}, \frac{5}{2^j}\big[\times]1,2[\Big) \cup \sum_{j=1}^\infty \Big(\big]\frac{4}{2^j} - \frac{1}{4^j}, \frac{4}{2^j} + \frac{1}{4^j}\big[\times [0,1] \Big).$$

Skizziere das Gebiet und überprüfe, ob das Gebiet einen LIPSCHITZ-Rand hat und ob es eine WIRTINGER-Ungleichung erfüllt.

Aufgabe 26: Anfangsrandwert-Aufgaben für die Wärmeleitungsgleichung.

(a) Bestimme mittels des Spiegelungsprinzip die Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf der Halbachse mit Dirichlet-Randbedingungen:

$$\begin{gathered} \partial_t u = \partial_x^2 u \text{ für } t > 0 \text{ und } x > 0, \\ \text{(AB) } u(0,x) = u_0(x) \text{ für } x > 0, \quad \text{(RB) } u(t,0) = 0 \text{ für } t > 0. \end{gathered} \tag{Dir}$$

Gebe die Lösung explizit in der Form $u(t,x) = \int_0^\infty K_{\mathrm{D}}(t,x,y) u_0(y) \,\mathrm{d}y$ an.

(b) Bestimme mittels des Spiegelungsprinzip die Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf der Halbachse mit Neumann-Randbedingungen:

$$\begin{gathered} \partial_t u = \partial_x^2 u \text{ für } t > 0 \text{ und } x > 0, \\ \text{(AB) } u(0,x) = u_0(x) \text{ für } x > 0, \quad \text{(RB) } \partial_x u(t,0) = 0 \text{ für } t > 0. \end{gathered} \tag{Neu}$$

Gebe die Lösung explizit in der Form $u(t,x) = \int_0^\infty K_{\mathrm{N}}(t,x,y) u_0(y) \,\mathrm{d}y$ an.

(c) In welchem Falle gilt Energieerhaltung $\int_0^\infty u(t,x) \,\mathrm{d}x \equiv \mathrm{const}$?

(bitte wenden)

Aufgabe 27: Abklingeingenschaften in der Wärmeleitungsgleichung mit diversen Randbedingungen.

Wir betrachten jeweils die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \partial_x^2 u$ mit Anfangsbedingungen $u(0,x) = u_0(x)$ auf dem Intervall $\Omega = (x_0, x_1)$, wobei bei $x = x_0$ und $x = x_1$ entsprechende Randbedingungen vorgeschrieben werden.

(a) Wir betrachten $\Omega =]0,\pi[$ und die gemischten Randbedingungen $u(t,0) = 0$ (Dirichlet) sowie $\partial_x u(t,\pi) = 0$ (Neumann). Bestimme ein vollständiges Orthonormalsystem $\{ \phi_n \in \mathrm{L}^2(\Omega | n \in \mathbb{N} \}$ mit $\phi''(x) = \lambda_n \phi_n(x)$ und $\phi_n(0) = 0$ und $\phi_n'(\pi) = 0$. Konstruiere daraus eine Lösungsformel für das Anfangswertproblem. Welche Abklingrate hat die Gesamtenergie $E(t) = \int_0^\pi u(t,x)\,\mathrm{d}x$?

(b) Wir betrachten nun auf $\Omega =]-\pi/4, \pi/4[$ die Abstrahlungsbedingungen

$$\partial_x u(t,\pi/4) + u(t,\pi/4) = 0 \quad \text{und} \quad \partial_x u(t,-\pi/4) - u(t,-\pi/4) = 0.$$

Zeige, dass die Lösung $u(t,\cdot)$ in $\mathrm{L}^2(\Omega)$ und dass die Gesamtenergie wie e^{-t} gegen 0 geht. Verwende dazu ohne Beweis, dass es ein vollständiges Orthonormalsystem aus Eigenfunktionen gibt. Dieses muss aber nicht explizit bestimmt werden.

(c) Betrachte wiederum Lösungen u des Problems aus (b). Leite für $a \in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$ die Identität

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega a\, u^2 \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega 2a\, u_x^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega a_{xx}\, u^2 \,\mathrm{d}x + \big[2a\, u u_x - a_x u^2\big]_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

her. Wähle nun $a(x) = \cos(\gamma x)$ mit geeignetem $\gamma > 0$, so dass sich die Abschätzung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega a\, u^2 \,\mathrm{d}x \le -\gamma^2 \int_\Omega a\, u^2 \,\mathrm{d}x$ ergibt. Dazu darf ohne Beweis verwendet werden, dass aus $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\beta \le c\beta$ die Abschätzung $\beta(t) \le \mathrm{e}^{ct}\beta(0)$ folgt (Gronwallsches Lemma). Folgere damit $\|u(t)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \le 2\mathrm{e}^{-0.7\,t} \|u(0)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$.

Aufgabe 28: Glättungseigenschaften der Wärmeleitungsgleichung. Die Lösungen des Anfangswertproblems der Wärmegleichung sind für $t > 0$ stets in C^∞. Wir wollen dies quantifizieren und betrachten dazu $u_t = u_{xx}$ auf den Intervall $\Omega =]0, 2\pi[$ mit periodischen Randbedingungen. Das Anfangswertproblem hat daher die Lösungsformel

$$u(t,\cdot) = \mathrm{e}^{tA} u_0 \quad \text{mit} \quad \mathrm{e}^{tA} v := \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-n^2 t} \langle v, E_n \rangle_{\mathrm{L}^2} E_n.$$

Hierbei bilden die E_n mit $E_n(x) = (2\pi)^{-1/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ ein vollständiges Orthonormalsystem im komplexen Hilbert-Raum $\mathrm{L}^2(\Omega)$.

(a) Zeige, dass für $t \ge 0$ der Operator e^{tA} von $\mathrm{L}^2(\Omega)$ nach $\mathrm{L}^2(\Omega)$ beschränkt ist und die Norm 1 hat.

(b) Zeige, dass für $t > 0$ der Operator e^{tA} von $\mathrm{L}^2(\Omega)$ nach $\mathrm{H}^1_{\mathrm{per}}(\Omega)$ auch beschränkt ist (verwende Aufgabe 18). Gebe eine Konstante $C > 0$ an, so dass $\|\mathrm{e}^{tA}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)\to \mathrm{H}^1_{\mathrm{per}}(\Omega)} \le C(1+t^{-1/2})$ gilt.

(c) Zeige für alle $k \in \mathbb{N}$, dass es positive C_k und α_k gibt, so dass für $t > 0$ die Abschätzung $\|\mathrm{e}^{tA}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)\to \mathrm{H}^k_{\mathrm{per}}(\Omega)} \le C_k(1+t^{-\alpha_k})$ gilt.