

Übungsblatt 8

Aufgabe 22: Zum Spuroperator. Es sei $\Omega = (0, \ell) \times \Sigma \subset \mathbb{R}^d$, wobei Σ in beschränktes Gebiet in \mathbb{R}^{d-1} sei. Für $x \in \Omega$ schreiben wir $x = (s, y)$ mit $s \in (0, \ell)$ und $y \in \Sigma$.

(a) Zeige für $u \in C^1(\overline{\Omega})$ und $0 \leq s_1 < s_2 \leq \ell$ die Abschätzung

$$\|u(s_1, \cdot) - u(s_2, \cdot)\|_{L^2(\Sigma)} \leq \sqrt{s_1 - s_2} \|\partial_s u\|_{L^2((s_1, s_2) \times \Sigma)} \leq \sqrt{s_1 - s_2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

(b) Zeige durch betrachten von $\tilde{u}(s, y) = (\ell - s)u(s, y)$, dass ein $C_\ell > 0$ existiert, so dass außerdem $\|u(0, \cdot)\|_{L^2(\Sigma)} \leq C_\ell \|u\|_{H^1(\Omega)}$ gilt.

(c) Schließe mittels Dichtheit, dass sich die Spurabbildung

$$\gamma : \begin{cases} C^1(\overline{\Omega}) & \rightarrow L^2(\Sigma), \\ u & \mapsto u(0, \cdot), \end{cases}$$

zu einem stetigen linearen Operator auf ganz $H^1(\Omega)$ fortsetzen lässt und dass jede Funktion in $H^1(\Omega)$ einen Repräsentanten hat, der in $C^{1/2}([0, \ell], L^2(\Sigma))$ liegt.

Zusatzbemerkung: Die Abbildung $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Sigma)$ ist nicht surjektiv.

Aufgabe 23: Resolventen und Eigenwerte von elliptischen Operatoren. Wir betrachten ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Weiter sei $A \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d})$, $a \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$ und $\alpha \in L^\infty(\Omega)$. Weiter gebe es ein $\delta > 0$, so dass $A(x)\xi \cdot \xi \geq \delta|\xi|^2$ für alle $x \in \Omega$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ gilt. Damit ist die Bilinearform

$$B(u, v) = \int_{\Omega} A(x) \nabla u(x) \cdot \overline{\nabla v(x)} + a(x) \cdot \nabla u(x) \overline{v(x)} + \alpha(x) u(x) \overline{v(x)} dx$$

auf $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ definiert. Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von B , falls es ein $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ gibt, so dass $B(u, v) = \lambda \int_{\Omega} uv dx$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt. Können wir für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ zeigen, dass ein $c_0 > 0$ mit $|B(u, u) - \lambda \|u\|_{L^2}^2| \geq c_0 \|u\|_{H^1}^2$, so liegt λ in der Resolventenmenge. Wir wollen große Gebiete finden, die in der Resolventenmenge liegen.

(a) Gebe ein $C_1 > 0$ an, so dass $|B(u, v)| \leq C_1 \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$ auf $H_0^1(\Omega)$ gilt.

(b) Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $B_\lambda(u, v) = B(u, v) - \lambda \int_{\Omega} uv dx$. Konstruiere ein λ_* , so dass B_λ für alle $\lambda < \lambda_*$ die Koerzitivität $B_\lambda(u, u) \geq c_0 \|u\|_{H^1}^2$ mit $c_0 > 0$ auf $H_0^1(\Omega)$ gilt.

(c) Es soll nun $\lambda \in \mathbb{C}$ untersucht werden. Betrachte dazu den $B_{\theta, \lambda}(u, v) = e^{i\theta} B_\lambda(u, v)$ und schätze $|B_{\theta, \lambda}(u, u)|$ nach unten durch $\text{Re}(B_{\theta, \lambda}(u, u))$ ab. Finde ein λ_\circ so, dass alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re } \lambda < \text{Re } \lambda_\circ$ in der Resolventenmenge liegt. Zeige weiter, dass für jeden Strahl $\lambda = \rho e^{i\sigma}$, $\rho > 0$, mit $\sigma \in]0, 2\pi[$ ein $\rho_*(\sigma)$ existiert, so dass alle $\lambda = \rho e^{i\sigma}$ mit $\rho > \rho_*(\sigma)$ in der Resolventenmenge liegen.

(bitte wenden)

Aufgabe 24: Lineare Elastizität. Es sei

$$E(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^\top) \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d} \quad \text{und} \quad \Sigma(E) = \lambda \text{Spur}(E)I + 2\mu E \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d},$$

wobei die Lamé-Konstanten λ und μ feste Parameter sind. Für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}$ sei das Skalarprodukt $A:B$ durch $\sum_{j,k=1}^d A_{jk}B_{jk}$ und $|A|^2$ durch $A:A$ definiert.

(a) Zeige, dass genau dann ein $\delta > 0$ mit $\Sigma(E):E \geq \delta|E|^2$ für alle $E \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}$ existiert, wenn $\mu > 0$ und $d\lambda + 2\mu > 0$ gilt.

(b) Wir betrachten nun ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und definieren auf $H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ die quadratische Form

$$Q(u) = \int_{x \in \Omega} \Sigma(E(u)):E(u) \, dx.$$

Setzen wir Funktionen aus $H_0^1(\Omega)$ durch 0 außerhalb von Ω fort, so können wir $H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ in $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) = H_0^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ einbetten. Stelle mittels der Fourier-Transformation $\widehat{u} = \mathcal{F}u$ die quadratische Form Q in der Form

$$Q(u) = \widehat{Q}(\widehat{u}) = \int_{\xi \in \mathbb{R}_*^d} \mathbb{Q}(\xi) \widehat{u}(\xi) \cdot \overline{\widehat{u}(\xi)} \, d\xi$$

mit einer geeigneten HERMITESCHEN Matrix $\mathbb{Q}(\xi) \in \mathbb{C}^{d \times d}$ dar.

(Hinweise: $\mathcal{F}(E(u)) = \frac{1}{2}(i\xi \otimes \widehat{u} + \widehat{u} \otimes i\xi)$ und $(a \otimes b):(c \otimes d) = a \cdot c \, b \cdot d$.)

(c) Folgere mittels (b), dass sich Q nach unten durch $\min\{\mu, \lambda + 2\mu\} \|\nabla u\|_{L^2}^2$ abschätzen lässt und vergleiche dies mit dem Ergebnis aus (a).