

Übungsblatt 7

Aufgabe 19: DIRICHLET-Problem. Auf dem Einheitskreis $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$ soll das folgende DIRICHLET-Problem gelöst werden:

$$\Delta u(x) = 0 \text{ für } x \in \Omega, \quad u(y) = g(y) \text{ für } y \in \partial\Omega. \quad (\text{DP})$$

(a) Zeige, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ und $c_n \in \mathbb{C}$ die Funktion $x \mapsto \operatorname{Re}(c_n(x_1 + ix_2)^n)$ eine Lösung von (DP) mit geeigneten Randwerten ist. Stelle diese Randwerte mittels des Winkels $\phi = \arg(x_1 + ix_2)$ dar.

(b) Konstruiere für $g_N : \phi \mapsto \operatorname{Re}(\sum_{n=0}^N c_n e^{in\phi})$ die Lösung u_N von (DP) und berechne die Normen von u_N in $L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ und $H^2(\Omega)$ explizit.

(c) Untersuche mittels des Grenzübergangs $N \rightarrow \infty$ für welche Funktionen $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die Lösung des DIRICHLET-Problems (DP) in $H^1(\Omega)$ bzw. in $H^2(\Omega)$ liegt. Dabei gelte in Analogie zu Aufgabe 18 für $s \in]0, \infty[$ die Definition

$$H_{\text{per}}^s(]0, 2\pi[) = \{f \in L^2(]0, 2\pi[) \mid \exists (c_j)_{j \in \mathbb{Z}} \text{ with } \sum_{j \in \mathbb{Z}} (1+|j|^2)^s |c_j|^2 < \infty: f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j e^{ijt}\}.$$

Aufgabe 20: Singularität an einer einspringenden Ecke. In der Ebene \mathbb{R}^2 seien mittels $x = r(\cos \phi, \sin \phi)$ Polarkoordinaten gegeben. Damit ist

$$\Omega = \{r(\cos \phi, \sin \phi) \in \mathbb{R}^2 \mid r \in]0, 1[, \phi \in]0, 3\pi/2[\}$$

als Dreiviertelkreisscheibe definiert.

(a) Überprüfe, dass die Funktion $w(x) = r^{2/3} \sin(2\phi/3)$ harmonisch auf Ω ist. Welche Randwerte nimmt w auf $\partial\Omega$ an?

(b) Prüfe, ob w in $H^1(\Omega)$ bzw. $H^2(\Omega)$ liegt. Zeige dazu, dass die schwachen Ableitungen gleich den klassischen Ableitungen sind.

(c) Zeige, dass es eine Funktion $f \in C^0(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ gibt, so dass die eindeutige Lösung des DIRICHLET-Problems $\Delta u = f$ in Ω und $u|_{\partial\Omega} = 0$ in $H_0^1(\Omega)$ liegt, aber nicht in $H^2(\Omega)$.

Aufgabe 21: Ganzraumprobleme.

(a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ symmetrisch und positiv definit, $b \in \mathbb{R}^d$ und $c \in]0, \infty[$. Beweise, dass die elliptische Gleichung

$$-\sum_{i,j=1}^d A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u + \sum_{k=1}^d b_k \frac{\partial}{\partial x_k} u + cu = f \text{ auf } \mathbb{R}^d$$

für jedes $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ eine eindeutige Lösung $u \in H^2(\mathbb{R}^d)$ hat.

(b) Zeige, dass für $c > 0$ die parabolische Gleichung $\frac{\partial}{\partial t} u = \Delta u - cu + f$ für $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+d}$ für jedes $f \in L^2(\mathbb{R}^{1+d})$ eine eindeutige Lösung $u \in L^2(\mathbb{R}^{1+d})$ hat, wobei $\frac{\partial}{\partial t} u, \frac{\partial}{\partial x_j} u, \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u \in L^2(\mathbb{R}^{1+d})$ gilt.

(c) Gilt das Ergebnis in (b) auch noch für $c \leq 0$?