

## Übungsblatt 6

**Aufgabe 16: Maximumsprinzip.** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein beschränktes Gebiet (zusammenhängend!) und  $u \in C^0(\overline{\Omega})$  subharmonisch (d.h.,  $\forall x \in \Omega \forall r > 0$  mit  $B_r(x) \subset \Omega : u(x) \leq \frac{1}{\omega_d r^{d-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) da(y)$ ). Zeige folgende Aussagen:

- (a) *Schwache Form des Maximumprinzips:*  $u$  nimmt sein Maximum auf  $\partial\Omega$  an.
- (b) *Starke Form des Maximumprinzips:* Nimmt  $u$  sein Maximum (auch) im Innern von  $\Omega$  an, dann ist  $u$  konstant.

**Aufgabe 17: GREENSche Funktionen.** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein beschränktes Gebiet mit  $C^2$ -Rand. Weiter sei  $G : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  die Greensche Funktion des Laplace-Operators auf  $\Omega$ , d.h.,  $w$  mit  $w(x, y) = G(x, y) - K_d(x-y)$  erfüllt  $w \in C^2(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$  und  $\Delta_y w(x, \cdot) = 0$  und es gilt  $G(x, y) = 0$  für  $x$  oder  $y$  in  $\partial\Omega$ . Zeige folgende allgemeine Eigenschaften von  $G$ .

- (a) Für alle  $x, y \in \overline{\Omega}$  gilt  $G(x, y) = G(y, x)$  und damit  $\Delta_x G(x, y) = \Delta_y G(x, y) = 0$  für  $x \neq y$ . (Beachte dazu  $\int_{\Omega} u_1 \Delta u_2 dx = \int_{\Omega} u_2 \Delta u_1 dx$  und wähle  $f_j = \Delta u_j$  geeignet.)
- (b)  $G(x, y) < 0$  für  $x, y \in \Omega$ . (Verwende eine geeignete Variante des Maximumprinzips.)
- (c) Für  $y \in \partial\Omega$  gilt  $\partial_y G(x, y) = \alpha(x, y)n(y)$  mit  $\alpha(x, y) \geq 0$ , d.h.,  $\partial_{n_y} G(x, y) \geq 0$ .
- (d)  $\int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} G(x, y) da(y) = 1$ .

**Aufgabe 18: Fourier-Reihen.** Für  $\Omega = (0, 2\pi)$  und  $k \in \mathbb{N}_0$  betrachte die Hilbert-Räume

$$H^k(\Omega) = \{ f \in L^2(\Omega) \mid f, f', \dots, f^{(k)} \in L^2(\Omega) \},$$

$$H_{\text{per}}^k(\Omega) = \{ f \in H^k(\Omega) \mid f^{(j)}(0) = f^{(j)}(2\pi) \text{ für } j = 0, \dots, k-1 \},$$

$$H_0^k(\Omega) = \text{Abschluss von } C_c^\infty(\Omega) \text{ in } H^k(\Omega).$$

Mit  $S_n(t) = \sin(nt)$  und  $C_n(t) = \cos(nt)$  sind in  $L^2(\Omega)$  drei vollständige Orthogonalsysteme gegeben durch

$$O_1 = \{ C_n, S_m \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0 \}, \quad O_2 = \{ C_{m/2} \mid m \in \mathbb{N}_0 \}, \quad O_3 = \{ S_{m/2} \mid m \in \mathbb{N} \}.$$

- (a) Zum OGS  $O_1$ : Zeige, dass  $f = \sum_1^\infty a_m S_m + \sum_0^\infty b_n C_n$  genau dann in  $H_{\text{per}}^1(\Omega)$  liegt, wenn  $\sum_1^\infty l^2(|a_l|^2 + |b_l|^2)$  endlich ist und dass dann  $f$  gliedweise differenziert werden darf.
- (b) Zum OGS  $O_2$ : Zeige für  $f = \sum_0^\infty b_m C_{m/2}$ , dass  $f \in H^1(\Omega)$  gilt, gdw  $\sum_0^\infty m^2 b_m^2 < \infty$ .
- (c) Zum OGS  $O_3$ : Zeige für  $f = \sum_1^\infty a_m S_{m/2}$ , dass  $f \in H_0^1(\Omega)$  gilt, gdw  $\sum_1^\infty m^2 a_m^2 < \infty$ .
- (d) Diskutiere, ob und wie sich die Aussagen in (a), (b) und (c) sich von der ersten Ableitung (d.h.,  $k = 1$ ) auf höhere Ableitungen (d.h.,  $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ) übertragen lassen.

(Hinweis: Betrachte für eine Richtung die gliedweise differenzierte Reihe und für die andere Richtung eine geeignete Entwicklung der Ableitung. Vorsicht beim partiellen Integrieren!)