Übungsblatt 5

Aufgabe 13: POINCARÉ**sche Ungleichungen** Ist Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^d$, so heißt $C_{\mathrm{Poin}}(\Omega)$ die POINCARÉ-Konstante von Ω, wenn es die kleinste Zahl C ist, die die Abschätzung

$$\int_\Omega u(x)^2\,\mathrm{d}x \le C \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } u \in \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\Omega)$$

erfüllt. Aufgrund der Dichtheit gilt dies dann auch für alle $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Wir wollen auch den Fall untersuchen, dass u nur auf einem Teil des Randes als u vorgeschrieben ist.

(a) Es gelte $\Omega \subset \overline{B_R(0)}$. Schätze $C_{\mathrm{Poin}}(\Omega)$ explizit durch R und d ab.

(b) Betrachte nun $\Omega = (0,\ell)\times(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ mit dem DIRICHLET-Rand $\Gamma_{\mathrm{Dir}} = \{0\}\times(0,1) \subset \partial\Omega$. Gebe ein $C_\ell > 0$ an, so dass Folgendes gilt:

$$\int_\Omega u(x)^2\,\mathrm{d}x \le C_\ell \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } u \in \mathrm{C}^1(\Omega) \text{ mit } u|_{\Gamma_{\mathrm{Dir}}} = 0.$$

(Zusatz: Mittels FOURIER-Reihen kann das optimale C_ℓ bestimmt werden.)

(c) Für $\alpha \in (0,1)$ sei nun $\Omega_\alpha = \{\, x \in (0,2)\times(-2,2) \mid x_1 \in (\alpha,2),\ |x_2| \le x_1 \,\} \subset \mathbb{R}^2$ und $\Gamma_\alpha = \{\alpha\}\times(-\alpha,\alpha)$ gegeben. Bestimme $C_\alpha > 0$, so dass

$$\int_{\Omega_\alpha} u(x)^2\,\mathrm{d}x \le C_\alpha \int_{\Omega_\alpha} |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } u \in \mathrm{C}^1(\Omega_\alpha) \text{ mit } u|_{\Gamma_\alpha} = 0.$$

Transformiere dazu Ω_α auf ein Rechteck, wende (b) an und schätze Funktionaldeterminanten geeignet ab.
(Schwieriger Zusatz: Zeige, dass C_α für $\alpha \searrow 0$ gegen ∞ streben muss.)

Aufgabe 14: Das POISSON**sche Integral für inhomogene** DIRICHLET**-Daten.**
Es sei $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$, $g \in \mathrm{C}^0(\partial\Omega)$ und

$$u(x) = \int_{|y|=R} P(x,y)\,g(y)\,\mathrm{d}a \quad \text{mit } P(x,y) = \frac{R^2-|x|^2}{2\pi R\,|x-y|^2}. \tag{PI}$$

(a) Zeige, dass das Integral in (PI) auf ganz Ω wohldefiniert ist und dass $u \in \mathrm{C}^2(\Omega)$ gilt.

(b) Folgere mit (a), dass u harmonisch ist, d.h. $\Delta u = 0$ in Ω.

(c) Zeige, dass sogar $u \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ gilt mit $u(y) = g(y)$ für $y \in \partial\Omega$. (Hinweis: Zeige $P(x,y) \ge 0$, $P(x,y) \to 0$ für $x \to y_* \in \partial\Omega\backslash\{y\}$ und $\int_{\partial\Omega} P(x,y)\,\mathrm{d}a = 1$ für alle $x \in \Omega$. Polarkoordinaten $x = r(\cos\phi,\sin\phi)$ und $y = R(\cos\psi,\sin\psi)$ könnten hilfreich sein.)

(bitte wenden)

Aufgabe 15: GREENsche **Funktionen**

(a) Für $\alpha > 0$ ist die eindimensionale elliptische Gleichung $-u'' + \alpha^2 u = f$ auf $\mathbb{R}$ gegeben. Zeige, dass für $f \in \mathrm{BC}^0(\mathbb{R})$ (beschrängkt und stetig), die eindeutige beschränkte Lösung durch

$$u(x) = \int_{y\in\mathbb{R}} G_\alpha(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y \text{ mit } G_\alpha(z) = \frac{1}{2\alpha}\,\mathrm{e}^{-\alpha|z|}$$

gegeben ist.

(b) Betrachte nun auf $\Omega = \mathbb{R}\times(0,\pi)$ das DIRICHLET-Problem $\Delta u = f$ in Ω und $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Zerlege u und f in FOURIER-Reihen bezüglich der x_2-Richtung ($u(x_1, x_2) = \sum_1^\infty u_k(x_1)\sin(kx_2)$) und leite Differentialgleichungen für die Koeffizienten u_k her.

(c) Leite aus (a) und (b) eine Reihendarstellung einer GREENschen Funktion G für das Dirichlet-Problem auf Ω her. (Nur formal, ohne Rechtfertigung der Grenzwertvertauschung.)

(d) Berechne die Reihensumme $G(x, y)$ explizit und zeige, dass $(x, y) \mapsto G(x, y) - K_2(x-y)$ analytisch auf $\Omega\times\Omega$ ist.

Aufgabe außerhalb des Übungsbetriebes: Für $d = 2$ oder 3 finde eine Funktion $g \in \mathrm{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ (stetig mit kompaktem Träger), so dass die Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta u = g$, die sich durch die Poisson-Formel $u(x) = \int_{y\in\mathbb{R}^d} K_d(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ ergibt, nicht in $\mathrm{C}^2(\mathbb{R}^d)$ liegt.

Die "schönste" Lösung, die bis zum Sonntag, den 16. Juli 2006 um 23:59 Uhr, per eBrief unter `mielke@wias-berlin.de` eingegangen ist, erhält einen **Büchergutschein**.