Übungsblatt 4

Aufgabe 10: Die **Tricomi–Gleichung** lautet $x_2 u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} = 0$ und ist für $x_2 > 0$ hyperbolisch.

(a) Bestimme im hyperbolische Bereich alle charakteristischen Kurven in der Form $\phi_j(x) =$ const, wobei ϕ_j die Form $\phi_j(x_1, x_2) = x_1 + A_j(x_2)$ haben soll. Skizziere die charakteristischen Kurven und prüfe, dass durch jden Punkt im hyperbolischen Bereich genau zwei solche Kurven laufen.

(b) Führe mittels $y_j = \phi_j(x)$ "charakteristische Koordinaten" ein. Transformiere die Tricomi–Gleichung in y–Koordinaten und zeige, dass für v mit $v(\phi_1(x), \phi_2(x)) = u(x)$ eine Gleichung in der Form $v_{y_1y_2} + B(y, v, \nabla_y v) = 0$ entsteht.

(c) Bestimme die sechs Lösungen der Tricomi–Gleichung, die die Form $u(x) = x_2^\alpha(x_1^2 + a x_2^3)^\beta$ mit $\alpha, \beta, a \in \mathbb{R}$ haben.

Aufgabe 11: Eine Wellengleichung. Wir betrachten das Cauchy–Problem

$$u_{tt} = u_{xx} + bu \text{ für } (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x),$$

wobei b ein reeller Parameter ist.

(a) Löse das Cauchy–Problem für $u_0(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$ und $u_1 \equiv 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, durch eine Potenzreihenansatz.

(b) Unter Verwendung der Linearität gebe die Lösung zu $u_0(x) = \frac{1}{h}\big(\mathrm{e}^{(\alpha+h)x} - \mathrm{e}^{\alpha x}\big)$ und $u_1 \equiv 0$ an. Durch den Grenzübergang $h \to 0$ (begründen!) konstruiere daraus eine Lösung v zu den Cauchy–Daten $u_0(x) = x \sin(kx)$ und $u_1 \equiv 0$ mit $k \in \mathbb{R}$.

(c) Sei nun u die Lösung aus (a). Zeige, dass auch $w = u_t$ Lösung ist. Welche Cauchy–Daten hat w bei $t = 0$? Wie lautet also die Lösung mit den Cauchy–Daten $u_0 \equiv 0$ und $u_1(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$?

Aufgabe 12: Analytische Lösungen der Burgers–Gleichung. Für $u_t + uu_x = 0$ seien die Cauchy–Daten $u(0, x) = f(x)$ vorgegeben. Dabei sei f eine analytische Funktion $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$ mit $|f_k| \le M r^{-k}$. Unter Verwendung des Satzes von Cauchy–Kowalevskaya soll ein möglichst großer Existenzbereich um den Punkt $(t, x) = (0, 0)$ angegeben werden, in dem es eine analytische Lösung gibt.

(a) Führe das Problem in die Form $w_t + a(x, w)w_x = b(x, w)$ mit $w(0, x) = 0$ über.

(b) Bestimme Majoranten der $V_{M_j, r/2} : (x, w) \mapsto M_j / \big(1 - (x+w)/(r/2)\big)$ für a und b und leite mit der Formel aus der Vorlesung eine Abschätzung für den Konvergenzradius her.

(c) Betrachte nun die implizite Lösungsdarstellung $u = f(x - ut)$ und schätze den Konvergenzradius direkt ab. Verwende dazu folgendes Majorantenkriterium: Wird f durch V majorisiert und löst $\widetilde{u}$ die Gleichung $\widetilde{u} = V(x - \widetilde{u}t)$, dann majorisiert $\widetilde{u}$ die gesuchte Lösung u.