

Übungsblatt 3

Aufgabe 7: Explizite Formeln für Entropielösungen der Burgers-Gleichung.
Für das Anfangswertproblem

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0, \quad u(0, x) = f(x),$$

gibt es folgende zwei expliziten Lösungsformeln (siehe “Evans, Kap. 3.4”):

$$u(t, x) = \partial_x V(t, x) \quad \text{mit} \quad V(t, x) = \min_{y \in \mathbb{R}} \left(\frac{(x-y)^2}{2t} + F(y) \right) \quad \text{und} \quad F(y) = \int_0^y f(\eta) d\eta, \quad (1)$$

$$u(t, x) = (x - Y(t, x))/t, \quad \text{wobei} \quad y = Y(t, x) \quad \text{einer der Minimierer in (1) ist.} \quad (2)$$

(a) Berechne u mittels der beiden Formeln für die Anfangsdaten f_α mit $f_\alpha(x) = 0$ für $x < 0$ und $f_\alpha(x) = \alpha$ für $x > 0$ und zeige, dass Entropielösungen vorliegen.

(b) Zeige unter der Annahme, dass Y eine C^1 -Funktion von t und x ist, dass die Formeln eine klassische Lösung liefern. (Hinweis: Setze $G(t, x, y) = (x-y)^2/(2t) + F(y)$ und verwende $V(t, x) = G(t, x, Y(t, x)) = \min G(t, x, \cdot)$. Folgere daraus $\partial_t V + \frac{1}{2}(\partial_x V)^2 = 0$.)

(c) Es sei nun $f \in C_c^0(\mathbb{R})$ (oder allgemeiner in $L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$). Unter Verwendung von (1) oder (2) folgere für alle $t > 0$:

$$(c1) \int_{\mathbb{R}} u(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx, \quad (c2) \|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} / t^{1/2}$$

mit einer zu bestimmenden numerischen Konstante $C > 0$.

Aufgabe 8: Fahrzeugmodell II (Vergessen in endlicher Zeit). Betrachte unser Fahrzeugmodell in dimensionsloser Form

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho - \rho^2) = 0 \quad \text{mit} \quad \rho(0, x) = f_0(x) := \min\{1, \max\{0, (1+x)/2\}\}.$$

(a) Bestimme die Entropielösung $\rho_0 : [0, \infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zur Anfangsbedingung f_0 .

(b) Bestimme eine zweite Anfangsbedingung $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\|f_0 - f_1\|_{L^1(\mathbb{R})} > 0$ und ein $t_* > 0$, so dass die zugehörige Entropielösung ρ_1 für $t \geq t_*$ mit ρ_0 übereinstimmt.

(c) Verwende Aufgaben 4(b) und 7, um eine explizite Lösungsformel für die Entropielösungen des Verkehrsmodells herzuleiten und folgere daraus, dass für alle Anfangsdaten f_2 mit den Eigenschaften (i)–(iii) die zugehörige Entropielösung ρ_2 für $t \geq 1$ mit ρ_0 übereinstimmt.

$$(i) f_2(x) = f_0(x) \text{ für } |x| \geq 1, \quad (ii) \int_{-1}^1 f_2(x) dx = 1, \quad (iii) f_2 \text{ monoton.}$$

(bitte wenden)

Aufgabe 9: Fundamentallemma der Variationsrechnung.

Zeige folgende Behauptungen:

(a) Es sei $p \in]1, \infty]$ und $f \in L^p(\Omega)$. Für alle $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ gelte $\int_\Omega f(x)\phi(x) dx = 0$. Dann gilt $f = 0$. (Dualraum!)

(b) Es sei $f \in L^1(\Omega)$ und für alle $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ gelte $\int_\Omega f(x)\phi(x) dx = 0$. Dann gilt $f = 0$.

(c) Es seien $f, g \in C^0(]a, b[)$ und für alle $\phi \in C_c^\infty(]a, b[)$ gelte $\int_a^b f(x)\phi'(x) + g(x)\phi(x) dx = 0$. Dann gilt $f \in C^1(]a, b[)$ und $f' = g$. Wähle dazu Testfunktionen ϕ , die in einem geeigneten Sinne gegen die charakteristische Funktion $\chi_{[y,x]}$ konvergieren und zeige $f(x) - f(y) = \int_y^x g(\xi) d\xi$.

(d) Es gelte $f, g \in L^1(]a, b[)$ und für alle $\phi \in C_c^\infty(]a, b[)$ sei $\int_a^b f(x)\phi'(x) + g(x)\phi(x) dx = 0$. Dann gilt $f \in W^{1,1}(]a, b[)$ und $f' = g$ (im Sinne der schwachen Ableitung).