Übungsblatt 2

Aufgabe 4: Transformation quaslinearer Gleichungen. Wir betrachten die quasilineare Gleichung

$$a(x, u(x)) \cdot \nabla u(x) = b(x, u(x)) \text{ für } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \tag{Q}$$

wobei die Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gesucht ist.

(a) Wir betrachten die Koordinatentransformation $x = \Phi(y)$ mit einer bijektiven Abbildung $\Phi : \widetilde{\Omega} \to \Omega$, wobei Φ und Φ^{-1} C^1 seien. Wir setzen $v(y) = u(\Phi(y)) = (u \circ \Phi)(y)$. Welche Gleichung erfüllt v, wenn u die Gleichung (Q) erfüllt.

(b) Es sei nun $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Bijektion, für die ψ und ψ^{-1} in C^1 seien. Welche Gleichung erfüllt $w : \Omega \to \mathbb{R}; x \mapsto \psi(u(x))$, wenn u die Gl. (Q) erfüllt.

(c) Betrachte den Spezialfall $\partial_t u + \widetilde{a}(t, x, u) \cdot \nabla_x u = b(t, x, u)$ und geben die Gleichungen für v und w aus (a) und (b) in der Form $\partial_t v + \dots$ bzw. $\partial_t w + \dots$ an. Dabei soll die Transformations gemäß (a) nicht von t abhängen.

(d) Welche Transformationen Φ und ψ führen die Gleichung $\partial_t u + \partial_{x_1} u + x_1 \partial_{x_2} u = u$ auf die Gleichung $\partial_t w + \partial_{y_1} w = 1$ zurück? Geben Sie die allgemeine Lösung w an und leiten Sie daraus die allgemeine Lösung u her.

Aufgabe 5: Fahrzeugmodell. Wir untersuchen das eindimensionale Fahrzeugmodell

$$\partial_t \rho + \partial_x\big(\rho V(\rho)\big) = 0 \text{ für } (t, x) \in [0, \infty[\, \times \mathbb{R}; \quad \rho(0, x) = \rho_0(x),$$

wobei $V(\rho) = \frac{v_{\max}}{\rho_{\max}}(\rho_{\max} - \rho)$ sei. Zu jeweils gegebenen Lösungen sollen die Fahrzeugbahnen $x = X(t; \xi)$ als Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = V(\rho(t, x(t))) \text{ und } x(0) = \xi$$

explizit bestimmt werden. Dazu sollen folgende zwei Fälle konkret berechnet werden.

(a) Hineinfahren in ein Stauende: Für $0 < \rho_- < \rho_+ \leq \rho_{\max}$ sei die Lösung

$$\rho(t, x) = \begin{cases} \rho_+ & \text{für } x \geq c_* t, \\ \rho_- & \text{für } x < c_* t, \end{cases} \quad \text{mit } c_* = \frac{v_{\max}}{\rho_{\max}}\big(\rho_{\max} - \rho_+ - \rho_-\big).$$

gegeben.

(b) Ampelanfahrproblem: Mit $e(t) = v_{\max} t - 2\sqrt{\ell v_{\max} t}$ ist die Verkehrsdichteverteilung gemäß der Vorlesung gegeben durch

$$\rho(t, x) = \begin{cases} \rho_{\max} & \text{für } x \in [-\ell, -v_{\max} t], \\ \frac{\rho_{\max}}{2}\Big(1 - \frac{x}{v_{\max} t}\Big) & \text{für } x \in [\max\{-v_{\max} t, e(t)\}, v_{\max} t], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(bitte wenden)

Aufgabe 6: Sprungbedingungen. Für $A : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ sei die Erhaltungsgleichung

$$\begin{aligned} &\big(\operatorname{div} A(\cdot, u(\cdot))\big)(x) = \widetilde{b}(x, u(x)) \\ &\text{mit } \big(\operatorname{div} A(\cdot, u(\cdot))\big)(x) = \textstyle\sum_{j=1}^d \partial_{x_j}\alpha_j(x) \text{ und } \alpha_j(x) = A_j(x, u(x)) \end{aligned}$$

auf $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ gegeben.

(a) Wie lautet die quasilineare Form $a(x, u) \cdot \nabla u = b(x, u)$ für klassische Lösungen?

(b) Es sei $u \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ eine schwache Lösung, d.h. für alle $\phi \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega A(x, u(x)) \cdot \nabla\phi(x) + b(x, u(x))\phi(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Weiter sei $\mathcal{C}$ eine Hyperfläche, die Ω in die zwei Teile Ω_+ und Ω_- teilt, so dass die Einschränkungen $u_\pm = u|_{\Omega_\pm}$ aus $\mathrm{C}^1(\overline{\Omega}_\pm)$ sind. Zeige die *Sprungbedingung*

$$\Big(A(y, u_+(y)) - A(y, u_-(y))\Big) \cdot \nu(y) \quad \text{für alle } y \in \mathcal{C},$$

wobei ν der Normalenvektor an $\mathcal{C}$ ist. (Hinweis: Zeige zunächst dass in Ω_+ und Ω_- klassische Lösungen vorliegen. Integriere dann die schwache Form auf Ω_+ und Ω_- getrennt und zeige, dass nur Randterme auf $\mathcal{C}$ übrig bleiben.)

(c) Konkretisiere die Sprungbedingung für den eindimensionalen Fall

$$\partial_t\big(\alpha(u)\big) + \partial_x\big(\beta(x, u)\big) = b(t, x, u),$$

wenn die Schockfront $\mathcal{C}$ in der Form $x = s(t)$ gegeben ist.