



## Übungsblatt 1

**Aufgabe 1 (Wärmeleitungsgleichung):** Es soll für  $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d$  die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta u = \sum_{j=1}^d u_{x_j x_j} \quad (\text{WLG})$$

untersucht werden.

(a) Es sei  $H(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp(-|x|^2/(4t))$  der sogenannte *Wärmeleitungskern*. Zeige, dass  $u(t, x) = H(t, x)$  eine Lösung von (WLG) ist.

(b) Es sei  $f \in C_c^0(\mathbb{R}^d) = \{f \in C^0(\mathbb{R}^d) \mid \text{sppt}(f) \text{ kompakt in } \mathbb{R}^d\}$ . Zeige, dass

$$u(t, x) = \int_{y \in \mathbb{R}^d} H(t, x-y) f(y) dy \quad (\text{L})$$

auch eine Lösung von (WLG) ist. (Grenzwertvertauschung mit Begründung!)

(c) Zeige, dass die Lösung aus (b) für alle  $t > 0$  die Abschätzungen

$$\inf\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^d\} \leq \inf\{u(t, x) \mid x \in \mathbb{R}^d\} \leq \sup\{u(t, x) \mid x \in \mathbb{R}^d\} \leq \sup\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^d\}$$

erfüllt und die Wärmeenergie-Erhaltung  $\int_{\mathbb{R}^d} u(t, x) dx = \text{const.}$  gilt.

(d) Zeige, dass die Lösung aus (L) für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  den Grenzwert  $f(x) = \lim_{t \searrow 0} u(t, x)$  erfüllt. (Hinweis: Substituiere  $y = x + t^\alpha z$  mit geeignetem  $\alpha$ .)

**Aufgabe 2 (Navier-Stokes-Gleichung):** Wir betrachten die Navier-Stokes-Gleichung

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = \Delta u, \quad \text{div } u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

im zweidimensionalen Streifen  $\Omega = \mathbb{R} \times (0, h)$ . Dabei ist  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  das Stömungsfeld und  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  der Druck. Weiter ist  $\Delta u$  der komponentenweise wirkende Laplace-Operator und  $(u \cdot \nabla)v = \sum_1^d u_j \partial_j v$ . Weiter gelten die Randbedingungen  $u = 0$  auf dem Rand  $\partial\Omega$  des Gebietes  $\Omega$ .

(a) Zeige, dass es Lösungen der Form  $u(t, x) = e^{\alpha t} \sin(k\pi x_2/h) \Phi$  mit  $\Phi \in \mathbb{R}^2$  gibt.

(b) Bestimme alle Lösungen  $(u, p)$ , für die  $u$  weder von  $t$  noch von  $x_1$  abhängt.

(c) Charakterisiere alle Lösungen  $(u, p)$ , für die  $u$  nicht von  $x_1$  abhängt, durch eine einfache partielle Differentialgleichung.

**Aufgabe 3 (Gleichung erster Ordnung):**

(a) Gebe die Lösung der semilinearen Differentialgleichung  $u_t + u_x = u^2$  an, die die Anfangsbedingungen  $u(0, x) = e^x \sin(x^2+3) + x^5$  erfüllt.

(b) Löse für beliebige, differenzierbare Anfangsbedingungen  $u(0, x) = f(x)$  die lineare Gleichung  $u_t + x u_x = x^2$ .