

Übersicht zu den Vorlesungen
Analysis I* (WiSe 2016/17)
Analysis II* (SoSe 2017)
Analysis III (WiSe 2017/18)

Alexander Mielke
Humboldt-Universität zu Berlin
Weierstraß-Institut für angewandte Analysis und Stochastik

13. Juli 2017

Inhaltsverzeichnis

Analysis I*	5
1 Grundlagen	5
1.1 Naive Mengenlehre	5
1.1.1 Darstellung von Mengen	5
1.1.2 Mengenbeziehungen	5
1.2 Elementare Aussagenlogik	6
1.3 Beweisstrategien	7
1.3.1 Beweismöglichkeiten für $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$:	7
1.4 Parametrisierte Aussagen und Quantoren	9
1.4.1 Geschachtelte Aussagen mit mehreren Quantoren	9
1.4.2 Verneinungsregeln	10
1.5 Relationen und Abbildungen	11
2 Die Zahlensysteme	14
2.1 Die natürlichen Zahlen \mathbb{N}	14
2.1.1 Rekursive Definitionen	15
2.2 Die ganzen Zahlen \mathbb{Z}	17
2.3 Die rationalen Zahlen \mathbb{Q}	18
2.4 Die reellen Zahlen \mathbb{R}	21
2.5 Die komplexen Zahlen	25
2.5.1 Beweis des Faktorisierungssatzes	28

3	Folgen, Grenzwerte und Teilmengen in \mathbb{R} und \mathbb{C}	30
3.1	Folgen und CAUCHY-Folgen	30
3.1.1	Rechenregeln	33
3.1.2	Zifferndarstellungen reeller Zahlen	34
3.2	Häufungswerte und Teilfolgen	36
3.3	Offene und abgeschlossene Teilmengen	41
3.4	Metrische Räume	45
3.4.1	Vervollständigung metrischer Räume	48
3.5	Konstruktionen von \mathbb{R}	50
4	Stetige Funktionen	55
4.1	Stetigkeit	55
4.1.1	Rechnen mit Funktionen	57
4.2	Existenzprinzipien für stetige Funktionen	58
4.2.1	Nullstellensatz von BOLZANO	58
4.2.2	Chaotische Iterationsfolgen in Intervallabbildungen	60
4.2.3	Beweisskizze	61
4.3	Gleichmäßige Stetigkeit	63
4.4	Stetigkeit in metrischen Räumen	66
4.5	Der Fundamentalsatz der Algebra	67
4.6	Eindeutigkeit der Vervollständigung	69
5	Differenzialrechnung	70
5.1	Die erste Ableitung	70
5.1.1	Die Rechenregeln für die Ableitung	71
5.2	Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung	73
5.3	Die LANDAU-Symbole	75
5.4	Höhere Ableitungen	76
5.5	Differenzieren in \mathbb{C}	80
5.5.1	Die komplexe Exponentialfunktion	82
5.6	Die Regeln von BERNOULLI und L'HOSPITAL	83
5.7	Extrempunkte und Kurvendiskussion	87
6	Integration	90
6.1	Das RIEMANN-Integral	90
6.2	Kriterien für Integrierbarkeit	93
6.3	Einfache Rechenregeln und Abschätzungen	95
6.4	Stammfunktionen und der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	96
6.4.1	Ein Ausblick in die Zukunft	98
6.5	Partielle Integration und Substitution	99
6.5.1	Partielle Integration	99
6.5.2	Substitutionenregel	99
6.6	Integration rationaler Funktionen	100
6.7	Uneigentliche RIEMANN-Integrale	102

Analysis II*	105
7 Funktionenfolgen und -reihen	106
7.1 Reihen	106
7.1.1 Konvergenzkriterien für Reihen	107
7.2 Doppelreihen und Umordnungen	108
7.3 Konvergenz von Funktionenfolgen und -reihen	114
7.4 Grenzwertvertauschungssätze	119
7.5 Potenzreihen	122
7.5.1 Konvergenzradius und gliedweise Operationen für Potenzreihen	122
7.5.2 Produkte von Potenzreihen	125
7.5.3 Verkettung von Potenzreihen	128
7.5.4 Kehrwert und Division von Potenzreihen	129
7.5.5 Die Potenzreihen für tanh und tan	130
7.6 TAYLOR-Reihen	131
7.7 Zwei Eigenschaften von $C([a, b])$	134
7.7.1 Der Weierstraßsche Approximationssatz	134
7.7.2 Der Kompaktheitssatz von Arzela–Ascoli	135
7.8 Fourier-Reihen	137
8 Funktionen mehrerer Veränderlicher	143
8.0 Darstellung von Funktionen	143
8.1 Stetigkeit und Differenzierbarkeit im \mathbb{R}^d	144
8.1.1 Stetigkeit im \mathbb{R}^d	144
8.1.2 Differentiation im \mathbb{R}^d	145
8.1.3 Rechenregeln für Ableitungen	147
8.2 Höhere Ableitungen	151
8.3 Extremwerte und kritische Punkte	154
8.4 Der Satz über Implizite Funktionen und Umkehrfunktionen	158
8.4.1 Der parameterabhängige BANACHsche Fixpunktsatz	158
8.4.2 IFS: Der Implizite-Funktionen-Satz und lokale Auflösbarkeit	162
8.4.3 Der Satz über die Inverse / Umkehrfunktion	165
8.5 Extrema unter Nebenbedingungen und Lagrange-Parameter	166
9 Gewöhnliche Differentialgleichungen	186
9.1 Einführung und Beispiele	186
9.2 Existenz- und Eindeutigkeitssätze	186

Analysis III*	186
9.3 Einige explizite Lösungsmethoden	186
9.4 Lineare Systeme	192
9.4.1 Stabile Systeme mit konstanten Koeffizienten	196
9.5 Die Phasenebene	203
9.6 Stabilitätstheorie	213
10 Mehrdimensionale Integration	214
10.1 Das LEBESGUE-Maß	214
10.1.1 Mengensysteme: σ -Algebren	214
10.2 Messbare Funktionen	219
10.3 Das LEBESGUE-Integral	220
10.4 Grenzwertsätze für das LEBESGUE-Integral	224
10.5 Der Satz von FUBINI	226
10.5.1 Prinzip von CAVALIERI zur Volumenberechnung	226
10.6 Der Transformationssatz	228
10.7 Die L^p -Räume	231
11 Vektoranalysis	237
11.1 Abbildungen versus Vektorfelder	237
11.2 Kurven und ihre Länge	242
11.3 Kurven- und Arbeitsintegrale	246
11.4 Potenziale und Gradientenfelder	252
11.5 Oberflächenintegrale	259
11.6 Der Integralsatz von Gauß	264
11.7 Der Satz von Stokes	271
11.8 Der Cauchysche Integralsatz für komplexe Funktionen	277
11.9 Differenzialformen und der abstrakte Satz von Stokes	285