Übersicht zu den Prüfungsthemen zur Vorlesung Analysis III (WiSe 2017/18)

Alexander Mielke
Humboldt-Universität zu Berlin
Weierstraß-Institut für angewandte Analysis und Stochastik

18. Januar 2018

Alle Übungsaufgaben der Vorlesung sind relevant.

Auch die Fähigkeit konkrete Probleme zu lösen kann abgefragt werden.

Bei langen Beweisen reicht eine Beweisskizze (Reihenfolge der Argumente und was sind die wichtigen Ideen und Sätze, die eingehen).

Kurze Beweisen sollten vollständig und exakt durchgeführt werden können.

Folgende Übersicht gibt die wichtigsten Themen an, aber es ist keine vollständige Liste.

9 Gewöhnliche Differentialgleichungen

9.1 Einführung und Beispiele

9.2 Existenz– und Eindeutigkeitssätze

Existenzsatz von Peano
Existenz– und Eindeutigkeitssatz von Picard–Lindelöf (Banachsche Fixpunktiteration)
Beispiel für Nichteindeutigkeit.

9.3 Einige explizite Lösungsmethoden

Linear skalare Gleichung, Bernoulli-Gleichung, Riccati-Gleichung

9.4 Lineare Systeme

Fundamentallösung, Wronski-Determinante, homogene und partikuläre Lösung
Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten:
Darstellung aller Lösungen mittels verallgemeinerten Eigenpaaren
partikuläre Lösungen mittels Exponentialpolynomen, Resonanzansätze
Matrixexponentialfunktion e^{tA}.

9.5 Stabilitätstheorie für Gleichgewichte in Gew. Dgl.

Exakte Charakterisierung von Stabilität für lineare Systeme
Problemangepasste Normen
Linearisierung in Fixpunkten und Stabilitätssatz mittels Eigenwertaussagen.
Liapunovsche Stabilitätssätze

10 Mehrdimensionale Integration

10.1 Maßräume und das Lebesgue-Maß

Messräume $(M, \mathfrak{A})$ und σ-Algebren

Maßräume $(M, \mathfrak{A}, \mu)$, Beispiel Zählmaß

Borelsche σ-Algebra

Lebesgue-Maß, äußeres Maß, Caratheodory'sche Schnittbedingung

Nicht Lebesgue-messbare Menge

10.2 Messbare Funktionen

Messbarkeit zwischen Messräumen

Borel– und Lebesgue-messbare Funktionen $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$

Zusammenhang mit Stetigkeit

Grenzwerte und Verkettung messbarer Funktionen

Einfache Funktionen

10.3 Das abstrakte Lebesgue-Integral

Zerlegung in Positiv– und Negativteil $f = f_+ - f_-$

Definition des (abstrakten) Lebesgue-Integral

Integrierbarkeit

Satz von Beppo Levi

Linearität des Integrals, Gebietsadditivität,

Vergleich mit Riemann'schen Integral

10.4 Grenzwertvertauschungssätze für das Lebesgue-Integral

Satz von Beppo Levi = (Satz von der monotonen Konvergenz)

Lemma von Fatou = Satz über einseitig beschränkte Folgen

Satz von Lebesgue = Satz über die majorisierten Konvergenz

10.5 Der Satz von Fubini

Prinzip von Cavalieri

Der Satz von Fubini (zwei Teile!!)

10.6 Der Transformationssatz

Bildmaß (Vorwärtstransformiertes Maß) von $(M, \mathfrak{A}, \mu)$ unter $\Psi : (M, \mathfrak{A}) \to (N, \mathfrak{C})$

Inverses Bildmaß und Rückwärtstransformiertes Maß $\Phi^* \mu$

Abstrakte Transformationssätze

Erzeugung neuer Maße mittels Dichten

Transformationssatz für das Lebesgue-Maß

Polar–, Kugel– und Zylinderkoordinaten

10.7 Die L^p-Räume

Äquivalenzklassen bzgl. μ-fast überall.

Lineare Raume $(\mathscr{L}^p(M, \mu), \|\!| \cdot |\!\|_p)$

Normierte Räume $(\mathrm{L}^p(M, \mu), \| \cdot \|_p)$

Beispiele $\mathrm{L}^p(\Omega)$ und $\ell_p := \{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \}$.

Young'sche, Hölder'sche und Minkowski'sche Ungleichungen

Vollständigkeit (Satz von Fischer–Riesz)

Hilbert-Raum $(\mathrm{L}^2(M, \mu), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{L}^2})$

Fourier-Reihen-Entwicklung in $\mathrm{L}^2([0, 2\pi[)$

11 Vektoranalysis

11.1 Transformation von Vektorfelder und Ableitungen

Transformation $x = \Psi(\widetilde{x})$

Punktabbildung $x = \Phi(y)$ liefert $\widetilde{x} = \widetilde{\Phi}(\widetilde{y}) = \Psi^{-1}(\Phi[\Psi(\widetilde{y})])$ $\boxed{\widetilde{\Phi} = \Psi^{-1} \circ \Phi \circ \Psi}$

Vektorfeld $x \mapsto v(x)$ transformiert sich zu $\widetilde{x} \mapsto \widetilde{v}(\widetilde{x})$ mit $\boxed{\widetilde{v}(\widetilde{x}) = \big(\mathrm{D}\Psi(\widetilde{x})\big)^{-1} v(\Psi(\widetilde{x}))}$

Für Vektorfelder gilt $v(x) \in \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d \times 1}$ (=Spaltenvektoren)

Funktion $x \mapsto F(x) \in \mathbb{R}$ transformiert sich zu $\widetilde{x} \mapsto \widetilde{F}(\widetilde{x}) = F(\Psi(\widetilde{x})$, also $\boxed{\widetilde{F} = F \circ \Psi}$

Ableitungen= Differenzialen $\boxed{\mathrm{D}\widetilde{F}(\widetilde{x}) = \mathrm{D}F(\Psi(\widetilde{x}))\mathrm{D}\Psi(\widetilde{x}) \in \mathbb{R}^{1 \times d}}$ (=Zeilenvektoren)

11.2 Kurven, ihre Länge und Kurvenintegrale

Definition von Jordan-Kurven

Länge und Rektifizierbarkeit

Kurvenintegral

11.3 Arbeitsintegrale und Potenziale

Definition und Berechnung von Arbeitsintegralen entlang einer Kurve (Unabhängigkeit von der Parametrisierung)

Existenz und Berechnung von Potenzialen zu Kraftfelder (=Kovektorfelder)

Satz von Poincare

11.4 Oberflächenintegrale

Definition und Berechnung von Oberflächenintegralen (Unabhängigkeit von der Parametrisierung)

Flussintegrale durch Flächen

11.5 Der Integralsatz von Gauß

Divergenz eines Vektorfeldes

Divergenzsatz von Gauß in $\mathbb{R}^d$ (partielle Integration in $\mathbb{R}^d$)

11.6 Der Satz von Stokes

Rotation eines Vektorfeldes

Der Wirbelsatz von Stokes in $\mathbb{R}^3$

Der Cauchysche Integralsatz in $\mathbb{C}$ für komplex differenzierbare Funktionen
(Das Wunder der Analysis: einmal komplex differenzierbar $\Longrightarrow$ unendlich oft komplex differenzierbar)

(Folgender Abschnitt ist nicht Prüfungsstoff.)

11.7 Differenzialformen und der abstrakte Satz von Stokes

Differenzialformen $\Lambda_k^r(\Omega)$ als r-mal differenzierbare alternierende k-Formen

äußere Ableitung $\mathbf{d} : \Lambda_k^r(\Omega) \to \Lambda_{k+1}^{r-1}(\Omega)$ mit $\mathbf{d} \circ \mathbf{d}$

Abstrakter Satz von Stokes: M ist Mfk der Dimension k mit $(k-1)$-dimensionalen glatten Rand ∂M und $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda_{k-1}^1(M)$, dann gilt $\int_M \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha} = \int_{\partial M} \boldsymbol{\alpha}$.