Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A. Mielke
Ph. Bringmann, Dr. I. Kmit
R. Hasenfelder, A. D. Vu

**Analysis 3**
**WiSe 2017/18**

# Übungsblatt 16

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen am 13.–15. Februar 2018 besprochen.

---

**Aufgabe 16.A** Gegeben seien der Würfel $W := \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x_j \le \alpha,\ j = 1,2,3\}$ und das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $v(x) = (x_1^2, x_2^2, x_3^2)^\top$.

(a) Berechnen Sie direkt das Flussintegral $\int_{\partial W} \langle v,\, n\rangle \,\mathrm{d}a$ des Vektorfeldes $v$ durch die Seitenflächen des Würfels $W$.

(b) Berechnen Sie obiges Integral mit Hilfe des Satzes von Gauß.

**Aufgabe 16.B** Gegeben sei der Doppelkegel $K := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \le x_3^2\}$. Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß das Flussintegral $\int_{\partial S} \langle v,\, n\rangle \,\mathrm{d}a$ des Vektorfeldes $v$ aus Aufgabe 16.A durch das Kegelsegment $S := \{x \in K : x_3 \in [0,h]\}$ für $h > 0$.

**Aufgabe 16.C** Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes folgende Integrale.

(a) $\int_\Gamma (-x_1^2 x_2^2,\, x_1 x_2^2)\,\overrightarrow{\mathrm{d}x}$ mit $\Gamma := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = \alpha^2\}$.

(b) $\int_\Gamma (x_1 + x_2,\, -x_1 + x_2)\,\overrightarrow{\mathrm{d}x}$ mit $\Gamma := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2/\alpha^2 + x_2^2/\beta^2 = 1\}$.

(c) $\int_\Gamma (x_2 + x_3,\, x_1 + x_3,\, x_1 + x_2)\,\overrightarrow{\mathrm{d}x}$
mit $\Gamma := \{(\alpha \sin^2 t,\, 2\alpha \sin t \cos t,\, \alpha \cos^2 t) \in \mathbb{R}^3 : t \in [0,\pi]\}$.
(*Hinweis:* Die Kurve wird in Richtung des steigenden Parameters $t$ durchlaufen.)

(d) $\int_\Gamma (x_2 - x_3,\, -x_1 + x_3,\, x_1 - x_2)\,\overrightarrow{\mathrm{d}x}$
mit $\Gamma := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x_1|^2 + |x_2|^2 = \alpha^2 \text{ und } x_1/\alpha + x_3/h = 1\}$ und $\alpha, h > 0$.
(*Hinweis:* Die Umlaufrichtung kann beliebig gewählt werden, muss allerdings mit angegeben werden.)