HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
Prof. A. Mielke
Ph. Bringmann, Dr. I. Kmit
R. Hasenfelder, A. D. Vu

Analysis 3
WiSe 2017/18

Übungsblatt 15

Schriftliche Abgabe der Zusatzaufgaben: Dienstag 13. Februar 2018 (13:15 Uhr)

Hinweis: Die mit **(V)** gekennzeichneten Aufgaben können Sie in den Übungen vom 13.–15. Feb. 2018 vorrechnen. Bitte bereiten Sie entsprechende Unterlagen vor. Eine schriftliche Abgabe ist in der letzten Woche nur noch für die **Zusatzaufgaben** möglich (bitte nur diejenige, die noch Punkte benötigen).

Aufgabe 15.1 (V) Skizzieren und berechnen Sie folgende Flächen:

(a) die Fläche eines zwischen zwei Breitengraden und zwei Längengraden eingeschränkten Sphärenstücks,

(b) die Fläche der Spiralfläche $K = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h\varphi)^\top \ : \ r \in [0,a],\, \varphi \in [0,2\pi]\}$, wobei $h > 0$ in Abhängigkeit von a und h.

Aufgabe 15.2 (V) Betrachten Sie das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $v(x) = (2x_1x_2, x_1^2{+}x_2^2)$ und berechnen das Flussintegral $\int_{\Gamma_j} v(x)\cdot\nu(x)\,\mathrm{d}s$ durch folgende Kurven.
(a) $\Gamma_1 = [-2,2] \times \{0\}$ (b) $\Gamma_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 \geq 0,\, |x| = 2\}$ (wähle ν!)

Aufgabe 15.3 (V) Für die Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sei ein Kraftfeld $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4_*$ gegeben mit $F(x) = \big(x_2x_3\mathrm{e}^{x_1},\, x_3\mathrm{e}^{x_1},\, x_2\mathrm{e}^{x_1}{+}\beta\cos(2x_4),\, \alpha x_3\sin(2x_4)\big)$.

(a) Wie muss β zu gegebenem α gewählt werden, damit F ein Potential $\mathcal{U}$ besitzt?

(b) Bestimmen Sie die beiden Parameter α und β und das Potential $\mathcal{U}$ so, dass $\mathcal{U}(0) = 0$, $\mathcal{U}(x^0) = 2$ in $x^0 = (0,1,1,0)$ gilt.

Aufgabe 15.Z1 (4 Punkte) Gegeben sei der gerade Kreiskegel $K = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1^2{+}x_2^2 < x_3^2,\, 0 < x_3 < 1\}$.

(a) Skizzieren Sie den Kegel K.

(b) Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche von K.

(c) In der Höhe $h \in\,]0,1[$ wird die Kegelspitze abgeschnitten. Berechnen Sie die Oberfläche des daraus resultierenden Kegelstumpfes.

Aufgabe 15.Z2 (4 Punkte) Magnetisches Feld Zwei Drähte durchstoßen die (x_1, x_2)-Ebene in den Punkten $(-1,0)$ und $(1,0)$ und werden gegenläufig von elektrischem Strom durchflossen. Das induzierte ebene Magnetfeld wird dann beschrieben durch $H : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2_*$ mit

$$H(x) = \frac{1}{(x_1{-}1)^2 + x_2^2}\big(x_2, 1{-}x_1\big) + \frac{1}{(x_1+1)^2 + x_2^2}\big({-}x_2, 1{+}x_1\big).$$

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ und prüfen Sie, ob er einfach zusammenhängend ist.

(b) Zeigen Sie, dass für $x_2 \neq 0$ die Funktion $\mathcal{B}$ ein Potential des Magnetfelds H ist:

$$\mathcal{B}(x) = \arctan\left(\frac{1-x_1}{x_2}\right) - \arctan\left(\frac{1+x_1}{x_2}\right).$$

(c) Berechnen Sie $\int_{\Gamma_j} H \,\overrightarrow{\mathrm{d}x}$ für die mathematisch positiv orientierten Kurven
$\Gamma_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x_1-1)^2 + x_2^2 = 1\}$,
$\Gamma_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x_1+1)^2 + x_2^2 = 1\}$ und
$\Gamma_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1^2 + x_2^2 = 4\}$.
Hinweis: Verwenden Sie die Grenzwerte von $\mathcal{B}$ für $x_2 \to 0$ von oben und unten auf den entsprechenden Abschnitten der x_1-Achse.

Aufgabe 15.Z3 (5 Punkte) Elektrisches Feld In den Punkten $p_1^\alpha = (0,0,\alpha)$ und $p_2^\alpha = (0,0,-\alpha)$ befinden sich zwei elektrische Ladungen $-1/\alpha$ und $1/\alpha$. Das induzierte elektrische Feld $E : \mathbb{R}^3 \setminus \{p_1^\alpha, p_2^\alpha\} \to \mathbb{R}^3_*$ ist gegeben durch

$$E^\alpha(x) = \frac{-1/\alpha}{|x-p_1^\alpha|^3}\big(x-p_1^\alpha\big) + \frac{1/\alpha}{|x-p_2^\alpha|^3}\big(x-p_2^\alpha\big).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Jacobi-Matrix von E symmetrisch ist.

(b) Berechnen Sie ein Potential $\mathcal{U}^\alpha$ des Feldes E^α.

(c) Berechnen Sie $E = \lim_{\alpha\to 0} E^\alpha$ und $\mathcal{U} = \lim_{\alpha\to 0} \mathcal{U}^\alpha$.

(d) Gilt $\mathrm{D}\,U = E$? Wie kann dies auch ohne Nachrechnen begründet werden?

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen am 06.–08. Februar 2018 besprochen.

Aufgabe 15.A Berechnen Sie die Oberfläche der Halbkugel

(a) in euklidischen Koordinaten,

(b) als Graph einer Funktion in Polarkoordinaten.

Aufgabe 15.B Gegeben seien die Kraftfelder $F, G, H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2_*$ mit

$$F(x) = (2x_1\,,\, x_2), \quad G(x) = (x_1-x_2\,,\, x_2-x_1) \quad \text{und} \quad H(x) = (1\,,\, x_2^2).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Kraftfelder jeweils ein Potential besitzen, und bestimmen Sie es.

(b) Skizzieren Sie jeweils die Äquipotentiallinien der Potentiale und die Kraftfelder.