Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A. Mielke
Ph. Bringmann, Dr. I. Kmit
R. Hasenfelder, A. D. Vu

Analysis 3
WiSe 2017/18

Übungsblatt 14

Schriftliche Abgabe: Dienstag 06. Februar 2018 (13:15 Uhr)

Hinweis: Die mit **(V)** gekennzeichneten Aufgaben können Sie in den Übungen vom 06.–08. Feb. 2018 vorrechnen. Bitte bereiten Sie entsprechende Unterlagen vor.

Aufgabe 14.1 (4 Punkte) (Länge einer PC^1-Kurve) Sei Γ eine PC^1-Kurve mit injektiver Parametrisierung $\gamma \in \mathrm{PC}^1(I;\mathbb{R}^d)$. Zu zeigen ist die Gleichung für die Jordan-Länge

$$L(\Gamma) = \int_I |\dot\gamma(s)| \,\mathrm{d}s. \qquad (*)$$

Gehen Sie wie folgt vor und nehmen Sie in (a) und (b) $\gamma \in \mathrm{C}^1(I;\mathbb{R}^d)$ an.

(a) Zeigen Sie durch Betrachten aller Zerlegungen, dass $L(\Gamma) \leq \int_I |\dot\gamma(s)|\,\mathrm{d}s$ gilt.

(b) Zeigen Sie folgende Behauptung:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall \text{Partitionen } P \text{ mit } \varphi(P) \leq \delta : \quad \int_I |\dot\gamma(s)|\,\mathrm{d}s \leq \varepsilon + \sum_{j=1}^N |\dot\gamma(t_{j-1})|\,(t_j - t_{j-1}).$$

Für Partitionen $P = \{t_0, \ldots, t_N\}$ ist die Feinheit $\varphi(P) := \max\{\, t_j - t_{j-1} \;:\; j = 1, \ldots, N \,\}$.
Hinweis: Die Abbildung $s \mapsto \dot\gamma(s)$ ist gleichmäßig stetig auf I.

(c) Komplettieren Sie den Beweis von (*) für alle PC^1-Kurven.

Aufgabe 14.2 (4 Punkte) (V) (Ventil im Fahrradreifen) Ein Rad mit Radius r rolle auf der x-Achse. Hierbei bewege sich der Mittelpunkt M des Rads mit der konstanten Geschwindigkeit v nach rechts. Ferner sei V ein fester Punkt der Radperipherie und V befinde sich zur Zeit $t = 0$ im Nullpunkt.

(a) Skizzieren Sie die Bahnkurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ von V.

(b) Geben Sie eine Parametrisierung γ der Kurve Γ an. *Hinweis:* Es überlagert sich die konstante Bewegung des gesamten Rads mit der Rotationsbewegung von V mit konstanter Winkelgeschwindigkeit v/r.

(c) Welche Länge besitzt die Kurve, die V bei einer Radumdrehung zurücklegt? Vergleichen Sie die von V und M zurückgelegten Weglängen.

Aufgabe 14.3 (4 Punkte) (V) Für einen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ und das Gebiet $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_3^2 > 0\}$ sei das Kraftfeld F_α gegeben durch

$$F_\alpha(x) := \left(\frac{2x_1 + \alpha x_3}{x_1^2 + x_3^2}\,,\ x_2\,,\ \frac{2x_3 - x_1}{x_1^2 + x_3^2} \right) \in \mathbb{R}^3_* = \mathbb{R}^{1\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie $\int_\Gamma F_\alpha \,\overrightarrow{\mathrm{d}x}$ auf dem Kreis $\Gamma = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_1^2 + x_3^2 = 1,\ x_2 = 0 \,\}$.

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat das Kraftfeld F_α eine symmetrische Ableitung?

(c) Berechnen Sie für $\alpha = 1$ ein Potential von F_α auf $\widehat{\Omega} := \{\, x \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_3 > 0 \,\}$.

Aufgabe 14.Z (4 Punkte) Bei einer Autobahnfahrt wurden mittels GPS folgende Positionen im Abstand von je einer Sekunde gemessen.

Zeit	**östliche Länge**	**nördliche Breite**
105	9.14820°	48.70879°
106	9.14783°	48.70884°
107	9.14746°	48.70889°
108	9.14709°	48.70894°

(a) Geben Sie ein Skalarprodukt an, das Vektoren mit Einheit "Winkelgrad pro Sekunde" so misst, dass die Länge eine Geschwindigkeit in km pro Stunde ergibt, und das Winkel auf einer Landkarte angibt (d.h. $0 =$Ost, $\pi/2 =$ Nord, $\pi =$West und $3\pi/2 =$Süd). Betrachten Sie die Erde als eine Kugel mit Umfang 40 000 km (die ursprüngliche Definition des "km").

(b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Fahrtrichtung des oben gemessenen Fahrzeugs.

(c) Finden Sie die Strecke auf einer Landkarte.

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den
Übungen am 30. Januar bis 01. Februar 2018 besprochen.

Aufgabe 14.A Für $\alpha > 0$ betrachte die Kurve

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1|^{2/3} + |x_2|^{2/3} = \alpha^{2/3}\}.$$

(a) Skizzieren Sie die Kurve Γ.

(b) Berechnen Sie die Länge von Γ.

Aufgabe 14.B Gegeben sei das Kraftfeld

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2_*;\ (x_1, x_2) \mapsto \big(-2x_2\,,\ x_1\big).$$

Berechnen Sie das Arbeitsintegral zwischen den Punkten $(1,0)^\top$ und $(-1,0)^\top$ längs

(a) der x_1-Achse,

(b) des oberen Halbkreises mit Radius 1 und

(c) des Polygonzuges $(1,0)^\top$, $(1,-1)^\top$, $(-1,-1)^\top$, $(-1,0)^\top$.