HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
Prof. A. Mielke
Ph. Bringmann, Dr. I. Kmit
R. Hasenfelder, A. D. Vu

Analysis 3
WiSe 2017/18

Übungsblatt 13

Schriftliche Abgabe: Dienstag 30. Januar 2018 (13:15 Uhr)

Hinweis: Die mit **(V)** gekennzeichneten Aufgaben können Sie in den Übungen vom 30. Jan. bis 1. Feb. 2018 vorrechnen. Bitte bereiten Sie entsprechende Unterlagen vor.

Aufgabe 13.1 (3 Punkte) (V) Es sei $\Omega := \{\, x \in \,]0,\infty[^2 \;:\; 4 < x_1^2 + 4x_2^2 < 16 \,\} \subset \mathbb{R}^2$.

(a) Skizzieren Sie Ω.

(b) Finden Sie eine möglichst einfaches Gebiet $\widehat{\Omega} \subset \,]0,\infty[\, \times \,]0,2\pi[$ und eine bijektive Transformation $\Phi : \widehat{\Omega} \to \Omega$. Skizzieren Sie auch $\widehat{\Omega}$.

(c) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $\mathrm{D}\Phi$ und berechnen mit Hilfe des Transformationssatzes das Integral

$$\int_\Omega \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + 4x_2^2}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 13.2 (4 Punkte) (V) Betrachten Sie für alle Parameter $\alpha > 0$ die Kurve

$$\Gamma_\alpha := \{\, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;:\; (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2\alpha^2(x_1^2 - x_2^2) = 0 \,\}.$$

(a) Beschreiben Sie Γ_α in Polarkoordinaten (r, ϕ), wobei $x = (r\cos\phi, r\sin\phi)$ sei.

(b) Zeigen Sie $\Gamma_\alpha = \alpha\Gamma_1$ und skizzieren Sie Γ_α für $\alpha = 1$ und $\alpha = 2$.

(c) Zeigen Sie, dass $\gamma_\alpha : [0, 2\pi] \ni t \mapsto \Big(\dfrac{\alpha\sqrt{2}\cos(t)}{1+\sin^2(t)}, \dfrac{\alpha\sqrt{2}\cos(t)\sin(t)}{1+\sin^2(t)}\Big) \in \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung von Γ_α ist.

(d) Berechnen Sie die Länge $L(\Gamma_\alpha)$ in Abhängigkeit von α. *Hinweis:* Sie können die Konstante $\varpi = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} \approx 2{,}622$ als bekannt voraussetzen.

Aufgabe 13.3 (3 Punkte) Betrachten Sie den Graphen $\Gamma := \{(t, c(t)) \;:\; t \in [0,1]\}$ der Cantor-Funktion $c : [0,1] \to [0,1]$. Zeigen Sie $L(\Gamma) < \infty$, d.h. Γ ist rektifizierbar. *Hinweis:* Beachten Sie, dass die Parametrisierung $\gamma : t \mapsto (t, c(t))$ nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 13.Z (5 Punkte) Betrachten Sie die Fourier-Reihe $f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\cos(k!\,t)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe in $\mathrm{L}^2(\mathbb{S})$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie für $Z, N \in \mathbb{N}$, dass $f\big(2\pi\frac{Z}{N}\big) = \infty$ gilt (d.h. es gilt keine gleichmäßige Konvergenz).

(c) Plotten Sie die Partialsummen $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}\cos(k!\,t)$ für $m = 1, 2, 3, 4, 6$. Sie können zum Beispiel MATLAB oder MATHEMATICA verwenden. Haben Sie eine Vermutung, warum die punktweise Divergenz auf $2\pi\mathbb{Q}$ nicht zu erkennen ist?

(bitte wenden)

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen am 23.–25. Januar 2018 besprochen.

Aufgabe 13.A (Minkowski'sche Ungleichung) $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Für $f \in \mathscr{L}^p(M,\mu)$ wurde $\|f\|_p := \left(\int_M |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$ für $1 < p < \infty$ definiert, sowie $\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x\in M} |f(x)|$.

(a) Zeigen Sie die Minkowski-Ungleichung im Falle $p = 1$ und $p = \infty$.

(b) Sei nun $p \in \,]1,\infty[$. Benutzen Sie $|a+b|^p \leq |a|\,|a+b|^{p-1} + |b|\,|a+b|^{p-1}$ und eine bekannte Ungleichung, um die Minkowski'sche Ungleichung für $f, g \in \mathscr{L}^p(M,\mu)$ zu zeigen.

(c) *Wiederholung:* Es seien nun $0 < p \leq 1$ und $f, g : M \to [0,\infty)$ μ-messbar. Weiter sei $N_p(h) := \left(\int_M |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$. Zeigen Sie, dass die umgekehrte Ungleichung gilt:

$$N_p(f+g) \geq N_p(f) + N_p(g).$$

Aufgabe 13.B (Cartesisches Blatt) Gegeben sei $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ und die zugehörige Kurve

$$\Gamma = \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; f(x,y) = 0 \,\right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

(a) Skizzieren Sie die Kurve Γ.

(b) In welchen Punkten $(x_0,y_0) \in \Gamma$ lässt sich die Kurve Γ lokal als Graph einer Funktion $g : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = g(x)$ mit $g(x_0) = y_0$ darstellen?

(c) Zeigen Sie, dass durch

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = \left(\frac{3t}{1+t^3}\,,\ \frac{3t^2}{1+t^3}\right),$$

eine Parametrisierung von Γ gegeben ist, und benutzen Sie diese, um die Länge der Kurve Γ im ersten Quadranten des $\mathbb{R}^2$ durch ein möglichst einfaches Integral auszudrücken.