Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A. Mielke
Ph. Bringmann, Dr. I. Kmit
R. Hasenfelder, A. D. Vu

Analysis 3
WiSe 2017/18

Übungsblatt 12

Schriftliche Abgabe: Dienstag 23. Januar 2018 (13:15 Uhr)

Hinweis: Die mit **(V)** gekennzeichneten Aufgaben können Sie in den Übungen vom 23.-25. Jan. 2018 vorrechnen. Bitte bereiten Sie entsprechende Unterlagen vor.

Aufgabe 12.1 (3 Punkte) Es sei $(M, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass der Vektorraum $\mathrm{L}^\infty(M,\mu)$ vollständig ist bezüglich der Norm

$$\|f\|_{L^\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in M} |f(x)| := \inf\{\alpha \in [0,\infty] \ : \ |f| \leq \alpha \ \mu\text{-fast überall}\}.$$

Aufgabe 12.2 (5 Punkte) (V)
Für welche $1 \leq p \leq \infty$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ liegen die folgenden Funktionen im Raum $\mathrm{L}^p(\Omega)$?

(a) $f(x) = \log(x)$ auf $\Omega =]0,1]$;

(b) $f(x) = x^\alpha$ auf $\Omega = (0,1]$;

(c) $f(x) = x^\alpha$ auf $\Omega = [1,\infty[$;

(d) $f(x) = |x|^\alpha$ auf $\Omega = B_1^d(0) \subset \mathbb{R}^d$ mit $d \geq 2$
(*Hinweis:* Integriere über $\Omega_k = B^d_{2^{1-k}}(0) \backslash B^d_{2^{-k}}(0)$ und verwende den Transformationssatz);

(e) Für welche $1 \leq p \leq \infty$ liegt die Folge $a_n = \frac{1}{n^{2/3}}$, $n \in \mathbb{N}$, im Folgenraum $\ell^p = \mathrm{L}^p(\mathbb{N},\zeta)$?

Aufgabe 12.3 (4 Punkte) (V) (a) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ Lebegue-messbar mit $\mu(\Omega) < \infty$. Zeigen Sie für $1 \leq q \leq p \leq \infty$, dass $\mathrm{L}^p(\Omega) \subseteq \mathrm{L}^q(\Omega)$ gilt.

(b) Sei $\Omega := [0,1]^d \subset \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie für $1 \leq q < p \leq \infty$ durch ein geeignetes Gegenbeispiel, dass $\mathrm{L}^p(\Omega) \subsetneq \mathrm{L}^q(\Omega)$.

Aufgabe 12.Z (4 Punkte) (V) Für $0 < p < 1$ und $f : M \to \mathbb{R}$ μ-messbar definiere

$$N_p(f) := \Big(\int_M |f|^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $N_p(f{+}g)^p \leq N_p(f)^p + N_p(g)^p$ gilt.
Hinweis: Untersuchen Sie das Vorzeichen von $\varphi(a) = a^p + b^p - (a+b)^p$ für $b \geq 0$.

(b) Folgern Sie daraus, dass $N_p(f{+}g) \leq 2^{(1-p)/p}\,(N_p(f) + N_p(g))$ gilt.

(c) Zeigen Sie durch ein geeignetes Beispiel, dass $C(p) = 2^{(1-p)/p} > 1$ die bestmögliche Konstante ist und dass somit die Minkowski-Ungleichung für $0 < p < 1$ nicht gilt.

(bitte wenden)

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen am 16.–18. Januar 2017 besprochen.

Aufgabe 12.A Zeigen Sie für allgemeine $p \in [1, \infty]$, dass $\mathrm{L}^p(M, \mu)$ ein normierter Vektorraum ist. *Hinweis:* Überprüfen Sie zunächst die Repräsentanten-Unabhängigkeit der Definitionen $[f]_\sim + [g]_\sim := [f+g]_\sim$, $\lambda[f]_\sim := [\lambda f]_\sim$ und $\|[f]_\sim\|_{L^p(\Omega)} := \|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$.

Aufgabe 12.B Seien $(M, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f \in \mathrm{L}^\infty(M, \mu)$ und $g \in \mathrm{L}^1(M, \mu)$. Zeigen Sie

$$fg \in L^1(M, \mu) \quad \text{und} \quad \|fg\|_{L^1(M,\mu)} \leq \|f\|_{L^\infty(M,\mu)} \|g\|_{L^1(M,\mu)}.$$

Aufgabe 12.C Betrachten Sie $p \in \left]0, 1\right[$ und nichtnegative, μ-messbare $f, g : M \to [0, \infty[$ und zeigen Sie für N_p aus Aufgabe 12.Z, dass folgende Abschätzung gilt:

$$N_p(f+g) \geq N_p(f) + N_p(g).$$