Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A. Mielke
Ph. Bringmann, Dr. I. Kmit
R. Hasenfelder, A. D. Vu

Analysis 3

WiSe 2017/18

Übungsblatt 11

Schriftliche Abgabe: Dienstag 16. Januar 2018 (13:15 Uhr)

Hinweis: Die mit **(V)** gekennzeichneten Aufgaben können Sie in den Übungen vom 16.-18. Jan. 2018 vorrechnen. Bitte bereiten Sie entsprechende Unterlagen vor.

Aufgabe 11.1 (4 Punkte) Sei $(M, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum.

(a) Sei $f : M \to [0, \infty]$ messbar. Zeigen Sie, dass $\widetilde{\mu} : \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ mit

$$\widetilde{\mu}(A) := \int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_M f\chi_A \,\mathrm{d}\mu$$

ein Maß auf $(M, \mathfrak{A})$ ist. $\widetilde{\mu}$ heißt „Maß mit der Dichte f bezüglich μ“.

(b) Sei $(N, \mathfrak{B})$ ein Messraum und $\Psi : M \to N$ $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-messbar. Zeigen Sie, dass $\Psi_*\mu : \mathfrak{B} \to [0, \infty]$ mit $\Psi_*\mu(B) := \mu(\Psi^{-1}(B))$ ein Maß auf $(N, \mathfrak{B})$ ist.

Aufgabe 11.2 (5 Punkte) (V) Berechnen Sie die folgenden Integrale durch geeignete Transformationen. Skizzieren Sie zunächst alle ursprünglichen und transformierten Gebiete und zerlegen Sie diese gegebenenfalls.

(a) $\displaystyle\int_A \big(x^2+y^2\big) \,\mathrm{d}(x, y)$ mit $A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 1 \le xy \le 2,\; 0 \le x \le 2y \le 4x \,\}$.
Hinweis: Verwenden Sie die Transformation $\Phi(u, v) := (\sqrt{u/v}, \sqrt{uv})$.

(b) $\displaystyle\int_B \big(x^3y+xy^3\big) \,\mathrm{d}(x, y)$ mit $B = \{\, (x, y) \in [0, \infty)^2 \;:\; 4x^2 - 3y^2 \le 4,\; 4y^2 - 3x^2 \le 4 \,\}$.
Hinweis: Verwenden Sie die Transformation $\Psi(u, v) := \left(\sqrt{\frac{4u+3v}{7}}, \sqrt{\frac{3u+4v}{7}}\right)$. Welche Bedingung an (u, v) muss erfüllt sein, dass $\Psi(u, v)$ wohldefiniert ist?

Aufgabe 11.3 (4 Punkte) (V) Der Volltorus T werde durch Rotation der Kreisscheibe $K = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; (x-R)^2 + z^2 \le r^2 \text{ und } y = 0 \,\}$ um die z-Achse erzeugt. Berechnen Sie mit Hilfe der Zylinderkoordinaten das Volumen des Volltorus in Abhängigkeit von $0 < r < R$.

Aufgabe 10.Z (4 Punkte) Sei $d \in \{2, 3\}$. Berechnen Sie mit Hilfe des Transformationssatzes, für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathrm{d}x}{|x|_\infty^\alpha (1 + |x|_\infty^\beta)} < \infty$$

gilt. Dabei ist $|x|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_d|)$ für $x = (x_1, \ldots, x_d)$.

(bitte wenden)

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen am 9.–11. Januar 2017 besprochen.

Aufgabe 11.A Betrachten Sie das Integral

$$I := \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-|x|^2}\,\mathrm{d}x.$$

(a) Zeigen Sie, dass sich das Integral I auf ein Produkt eindimensionaler Integrale zurückführen lässt.

(b) Berechnen Sie I für $d = 2$ mittels Polarkoordinaten.

(c) Leiten Sie eine Formel für das Integral I für beliebige $d \in \mathbb{N}$ her.

Aufgabe 11.B Benutzen Sie Zylinderkoordinaten, um das Integral

$$\int_A z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x, y, z)$$

für $A = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2 \,\}$ zu berechnen.