HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
Prof. A. Mielke
Ph. Bringmann, Dr. I. Kmit
R. Hasenfelder, A. D. Vu

Analysis 3
WiSe 2017/18

Übungsblatt 10

Schriftliche Abgabe: Dienstag 9. Januar 2018 (13:15 Uhr)

Hinweis: Die mit **(V)** gekennzeichneten Aufgaben können Sie in den Übungen vom 9.-11. Jan. 2018 vorrechnen. Bitte bereiten Sie entsprechende Unterlagen vor.

Aufgabe 10.1 (4 Punkte) Sei $\mathrm{Cav}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ die Familie der Teilmengen von $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, für die das Prinzip von Cavalieri (vgl. Vorlesung) gilt. Sei $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkte Mengen in $\mathrm{Cav}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$. Beweisen Sie, dass die Mengen

$$\text{(a) } A_1 \cup A_2, \qquad \text{(b) } \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \qquad \text{(c) } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

auch zu $\mathrm{Cav}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ gehören.

Aufgabe 10.2 (4 Punkte) (V) (a) Es sei

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{wenn } x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{wenn } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

auf $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$. Berechne die beiden iterierten eindimensionalen Integrale $\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ und $\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ und zeige damit, dass die Reihenfolge der eindimensionalen Integrationen wesentlich ist.

(b) Es sei

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{wenn } x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{wenn } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

auf $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die beiden iterierten eindimensionalen Integrale gleich sind, aber trotzdem f nicht Lebesgue-integrierbar ist.

Aufgabe 10.3 (4 Punkte) (V) Schwerpunkt Der Schwerpunkt eines Körpers $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit homogener Massenverteiling ist gegeben durch $x^{\mathrm{Schw}} = (x_1^{\mathrm{Schw}}, \ldots, x_d^{\mathrm{Schw}}) \in \mathbb{R}^d$ mit

$$\lambda_d(\Omega)\, x_i^{\mathrm{Schw}} \;:=\; \int_\Omega x_i \,\mathrm{d}x \quad \text{für } i = 1, \ldots, d.$$

Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Halbkugel $H = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 9,\ x_3 \ge 0 \,\}$.

(bitte wenden)

Aufgabe 10.4 (4 Punkte) (V) Grenzwertvertauschung. Es sei $(M, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und (f_k) eine Folge $\mathfrak{A}$-messbarer Funktionen.

(a) Zeigen Sie unter der Zusatzvoraussetzung $f_k \geq 0$ für alle k die Grenzwertvertauschung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_M f_k \, \mathrm{d}\mu = \int_M \Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \Big) \, \mathrm{d}\mu.$$

(b) Beweise das Folgende: Ist $\sum_{k=1}^{\infty} \int_M |f_k| \, \mathrm{d}\mu < \infty$, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ μ-fast überall absolut gegen eine μ-messbare Funktion f, und es gilt die Grenzwertvertauschung

$$\int_M f \, \mathrm{d}\mu = \int_M \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_M f_k \, \mathrm{d}\mu.$$

Aufgabe 10.Z1 (4 Punkte) Für welche α, $\beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{d}x}{|x|_\infty^\alpha (1 + |x|_\infty^\beta)} < \infty \text{ ?}$$

Dabei ist $|x|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$ für $x = (x_1, x_2)$. Benutze nur den Satz von Fubini und nicht den Transformationssatz.

Aufgabe 10.Z2 (5 Punkte) (a) Es sei $E \subset \mathbb{R}^2$ messbar und $\lambda_1(E_x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$ (wobei $E_x := \{ y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E \}$). Folgern Sie, dass dann $\lambda_2(E) = 0$ und $\lambda_1(\widehat{E}_y) = 0$ für fast alle $y \in \mathbb{R}$, wobei $\widehat{E}_y := \{ x \in \mathbb{R} : (x, y) \}$.
Hinweis: Satz von Fubini.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty]$ eine messbare Funktion. Sind die beiden folgenden Aussagen (B1) und (B2) äquivalent? (Hierbei ist "$\forall_{\text{f.a.}}$" gleichbedeutend mit "für fast alle".)

(B1) $\forall_{\text{f.a.}} x \in \mathbb{R} \;\; \forall_{\text{f.a.}} y \in \mathbb{R} : \quad f(x, y) < \infty$;

(B2) $\forall_{\text{f.a.}} y \in \mathbb{R} \;\; \forall_{\text{f.a.}} x \in \mathbb{R} : \quad f(x, y) < \infty$.

(c) Sind die beiden folgenden Aussagen (C1) und (C2) äquivalent?

(C1) $\forall_{\text{f.a.}} x \in \mathbb{R} \;\; \forall y \in \mathbb{R} : \quad x - y$ ist irrational;

(C2) $\forall y \in \mathbb{R} \;\; \forall_{\text{f.a.}} x \in \mathbb{R} : \quad x - y$ ist irrational.

Hinweis zu (b) und (c): Es kann hilfreich sein, die geschachtelten Quantorenaussagen durch Klammern zu strukturieren.

Aufgabe 10.Z3 (4 Punkte) "Fubini via Cavalieri". Es sei $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ mit $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-messbare Funktion und $A := \big\{ (x, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : z \in [0, f(x)] \big\}$.

(a) Zeige $\lambda_{d+1}(A) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, \mathrm{d}x$ mittels des Prinzips von Cavalieri.

(b) Für $\widehat{x} \in \mathbb{R}^m$ betrachte die Schnitte $A_{\widehat{x}} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ und zeige $\lambda_{n+1}(A_{\widehat{x}}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\widehat{x}, \widetilde{x}) \, \mathrm{d}\widetilde{x}$ f.ü.

(c) Folgere $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(\widehat{x}, \widetilde{x}) \, \mathrm{d}\widetilde{x} \Big) \, \mathrm{d}\widehat{x}$.

(bitte wenden)

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen am 19.–21. Dezember 2017 besprochen

Aufgabe 10.A Sei $(\mathbb{N}^k, \mathrm{Pot}(\mathbb{N}^k), \zeta_k)$ der Maß-Raum mit Zählmaß ζ_k. Sei f eine Funktion auf $\mathbb{N}^2$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = y, \\ -1 & \text{für } x = y+1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist der Satz von Fubini in diesem Fall anwendbar? Bestimme

$$\int_{\mathbb{N}} \Big(\int_{\mathbb{N}} f(x,y)\,\mathrm{d}\zeta_1 \Big)\,\mathrm{d}\zeta_1, \quad \int_{\mathbb{N}} \Big(\int_{\mathbb{N}} f(x,y)\,\mathrm{d}\zeta_1 \Big)\,\mathrm{d}\zeta_1, \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{N}^2} |f(x,y)|\,\mathrm{d}\zeta_2.$$

Aufgabe 10.B (a) Gegeben seien das Quadrat $Q = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le x_1, x_2 \le 1 \,\}$ und die Funktion $f(x_1,x_2) = x_1^3 x_2^4$. Berechne das Integral

$$\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x$$

mithilfe des Satzes von Fubini.

(b) Sei $A = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \;:\; x_1^2 + (x_2-1)^2 \le 2 \,\}$. Berechne das Integral

$$\int_A \big(x_1^2 + 3x_2^2 + 1\big)\,\mathrm{d}x.$$