Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A. Mielke
Ph. Bringmann, Dr. I. Kmit
R. Hasenfelder, A. D. Vu

Analysis 3
WiSe 2017/18

Übungsblatt 9

Schriftliche Abgabe: Dienstag 19. Dezember 2017 (13:15 Uhr)

Hinweis: Die mit **(V)** gekennzeichneten Aufgaben können Sie in den Übungen vom 19.-21. Dez. 2017 vorrechnen. Bitte bereiten Sie entsprechende Unterlagen vor.

Aufgabe 9.1 (5 Punkte) (V) Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Folge der messbaren Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Entscheiden Sie unter welcher der folgenden zusätzlichen Annahmen die Grenzwertvertauschung

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}x$$

gilt oder falsch ist (Gegenbeispiel):

(a) $f_n \geq f$ und $\int_{[0,1]} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$ für alle n;

(b) $f_n \geq f_{n+1}$ für alle n;

(c) $f_n \leq f$ für alle n.

Sind im Fall (c) der Satz von Lebesgue bzw. das Lemma von Fatou anwendbar?

Aufgabe 9.2 (5 Punkte) (V) Sei $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\lim_{x\nearrow b} f(x) = \infty$.

(a) Beweisen Sie, dass f genau dann Lebesgue-integrierbar ist, wenn das uneigentliche Riemann-Integral ${}^{\mathrm{R}}\!\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta\nearrow b} {}^{\mathrm{R}}\!\int_a^\beta |f(x)|\,\mathrm{d}x$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie für den Fall in (a) die Gleichheit "$\overset{!!}{=}$" in

$$\int_{[a,b[} f\,\mathrm{d}\lambda_1 := {}^{\mathrm{L}}\!\!\int_{[a,b[} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{!!}{=} {}^{\mathrm{R}}\!\!\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\beta\nearrow b} {}^{\mathrm{R}}\!\!\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Die Funktionenfolge $g_n(x) = \begin{cases} |f(x)| & \text{für } a \leq x \leq b - 1/n, \\ 0 & \text{für } b - 1/n < x \leq b, \end{cases}$ könnte hilfreich sein. Benutze den Satz von Lebesgue für eine Richtung und den Satz von Beppo Levi für die andere Richtung.

Aufgabe 9.3 (4 Punkte) Bestimme alle $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, für die die Funktion $f(x) = x^\beta \sin x^\alpha$ Lebesgue-integrierbar bzw. Riemann-integrierbar auf $]0,1[$ ist.
Hinweis: Benutze Aufgabe 9.2.

Aufgabe 9.Z (3 Punkte) Zeigen Sie, dass der Grenzwert

$$G := \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{n \sin(|x|/n)}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

existiert und berechnen Sie ihn.

(bitte wenden)

Die folgenden Aufgaben werden teilweise
in den Übungen am 12.–14. Dezember 2017 besprochen

Aufgabe 9.A (Monotone Konvergenz) (a) Sei $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine Folge messbarer Funktionen, wobei f_1 Lebesgue-integrierbar ist. Folgern Sie aus

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \ldots \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^d,$$

dass die Grenzwertvertauschung

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x, \tag{GWV}$$

auch wenn die Grenzfunktion $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ nicht integrierbar ist.

(b) Prüfen Sie in den folgenden vier Fällen die Gleichheit (GWV) und welche der drei Grenzwertsätze anwendbar sind:

(b1) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+(x/n)^2}$ auf $\Omega = \mathbb{R}$,

(b2) $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1/n}}$ auf $\Omega = \,]0,\infty[$,

(b3) $f_n(x) = \dfrac{1}{x+1/n^2}$ auf $\Omega = \,]0,\infty[$,

(b4) $f_n(x) = -\dfrac{1}{1+nx^2}$ auf $\Omega = \mathbb{R}$.

Aufgabe 9.B Sei $f_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \begin{cases} n\sin(nx) & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{n}, \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{n} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f_n für jedes n Lebesgue-messbar und Lebesgue-integrierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $f_n(x)$ für jedes $x \in [0,\pi]$ konvergiert.

(c) Sind das Lemma von Fatou beziehungsweise der Satz von Lebesgue anwendbar?

(d) Gilt die Gleichheit

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi]} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[0,\pi]} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \text{ ?}$$