HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
Prof. A. Mielke
Ph. Bringmann, Dr. I. Kmit
R. Hasenfelder, A. D. Vu

Analysis 3
WiSe 2017/18

Übungsblatt 7

Schriftliche Abgabe: Dienstag 5. Dezember 2017 (13:15 Uhr)

Hinweis: Die mit **(V)** gekennzeichneten Aufgaben können Sie in den Übungen vom 5.-7. Dez. 2017 vorrechnen. Bitte bereiten Sie entsprechende Unterlagen vor.

Aufgabe 7.1 (5 Punkte) (V) Sei $C \subset [0,1]$ die Standard-Cantor-Menge und $\mathfrak{B}_1 \subset \mathrm{Pot}(\mathbb{R})$ die von den offenen Mengen erzeugte Borel'sche σ-Algebra.

(a) Zeige $C \in \mathfrak{B}_1$ und bestimme $\lambda_1(C)$.

(b) Zeige, dass $\mathfrak{L}_1$ und $\mathrm{Pot}(\mathbb{R})$ gleichmächtig sind (d.h., dass beide Mengen gleich viel Elemente haben). *Hinweis:* Verwende Teilmengen von C.

Aufgabe 7.2 (5 Punkte) (V) Es sei $\mathfrak{A} \in \{\mathfrak{B}, \mathfrak{L}\}$ und $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sei $\mathfrak{A}$-messbar (also genauer gesagt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1)$-messbar).

(a) Zeigen Sie, dass $F_1 : x \mapsto |f(x)|$ auch $\mathfrak{A}$-messbar ist.

(b) Sei zusätzlich $f(x) \neq 0$ auf $\mathbb{R}$. Zeige, dass $F_2 : x \mapsto 1/f(x)$ auch $\mathfrak{A}$-messbar ist.

(c) Sei $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $\mathfrak{A}$-messbar. Beweise, dass $F_3 : x \mapsto f(x)+g(x)$ auch $\mathfrak{A}$-messbar ist.

Hinweis: Drücke $F_j^{-1}([a,\infty])$ durch f^{-1} aus. Im Teil (c) betrachte zuerst $(f,g) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^2$ und benutze dann Aufgabe 7.B.

Aufgabe 7.3 (4 Punkte) Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge messbarer Funktionen. Zeige, dass die Menge

$$A := \Big\{ x \in \mathbb{R} : \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) \Big\}$$

in $\mathfrak{L}_1$ liegt. *Hinweis:* Rekapituliere die Definition von punktweiser Konvergenz und betrachte Mengen der Form $\{x : |f_n(x) - f_{n+m}(x)| < 1/k\}$.

Aufgabe 7.Z (3 Punkte) Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Beweise, dass f' messbar ist.

Hinweis: Betrachte Näherungsfunktionen, die durch Differenzenquotienten gegeben sind.

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen am 28.–30. November 2017 besprochen

---

Aufgabe 7.A

(a) Zeige, dass für alle $a < b$ die Intervalle $[a,b[$ und $[a,b]$ in $\mathfrak{B}_1$ liegen.

(b) Zeige, dass $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}]n-3^{-n}, n+2^{-n}]$ in $\mathfrak{B}_1$ liegt, und bestimme $\lambda_1(A)$.

(c) Es sei $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n^n, n^n+\frac{1}{\ln(n+1)}] \setminus \mathbb{Q}$. Zeige $B \in \mathfrak{B}_1$ und bestimme $\lambda_1(B)$.

Aufgabe 7.B Es sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^2$ und es gelte $f^{-1}([a_1,\infty]\times[a_2,\infty]) \in \mathfrak{L}_d$ für alle $(a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, dass f Lebesgue-messbar ist.