Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A. Mielke
Ph. Bringmann, Dr. I. Kmit
R. Hasenfelder, A. D. Vu

Analysis 3
WiSe 2017/18

Übungsblatt 6

Schriftliche Abgabe: Dienstag 28. November 2017 (13:15 Uhr)

Hinweis: Die mit **(V)** gekennzeichneten Aufgaben können Sie in den Übungen vom 28.-30. Nov. 2017 vorrechnen. Bitte bereiten Sie entsprechende Unterlagen vor.

Aufgabe 6.1 (4 Punkte) (V) Teil I. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maß-Raum. Für eine beliebige Menge $X \in \mathcal{A}$ definieren wir die Einschränkung $\mathcal{A}_X := \{A \in \mathcal{A} \mid A \subset X\}$ und $\mu_X := \mu|_{\mathcal{A}_X}$.

(I.a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_X = \{A \cap X \mid A \in \mathcal{A}\}$ gilt und dass $\mathcal{A}_X$ eine σ-Algebra auf X ist.

(I.b) Zeigen Sie, dass durch μ_X ein Maß auf $(X, \mathcal{A}_X)$ gegeben ist.

Teil II. Auf den einelementigen Teilmengen von $\mathbb{N}^2$ definieren wir

$$\mu(\{(j,k)\}) = \mathrm{e}^{-j}.$$

(II.a) Zeigen Sie, dass sich μ so auf $\mathrm{Pot}(\mathbb{N}^2)$ fortsetzen lässt, dass $(\mathbb{N}^2, \mathrm{Pot}(\mathbb{N}^2), \mu)$ ein Maß-Raum ist. Zeigen Sie, wie durch μ auf der Teilmenge $\{j\} \times \mathbb{N}$ ein Zählmaß definiert werden kann.

(II.b) Charakterisieren Sie alle Mengen $A \in \mathrm{Pot}(\mathbb{N}^2)$ mit endlichem Maß $\mu(A) < \infty$.

Aufgabe 6.2 (5 Punkte) (V) Offene Mengen sind Lebesgue-messbar. Wir definieren den Abstand zwischen $A, B \subset \mathbb{R}^d$ durch $\mathrm{dist}(A,B) := \inf\{|a-b| \mid a \in A, b \in B\}$.

(a) Seien $A, B \subset \mathbb{R}^d$ mit $\mathrm{dist}(A,B) > 0$ gegeben. Zeigen Sie: $\lambda^{\mathrm{a}}(A \cup B) = \lambda^{\mathrm{a}}(A) + \lambda^{\mathrm{a}}(B)$.

(b) Sei $O \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge und $A_j := \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \frac{1}{j+1} < \mathrm{dist}(\{x\}, O^{\mathrm{c}}) \leq \frac{1}{j}\right\}$ für $j \in \mathbb{N}$. Sei ferner $B \subset \mathbb{R}^d$ mit $\lambda^{\mathrm{a}}(B) < \infty$ gegeben. Zeigen Sie

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{\mathrm{a}}(A_j \cap B) \leq 2\lambda^{\mathrm{a}}(B).$$

Betrachten Sie dazu die Aufteilung $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k-1} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k}$ und Teil (a).

(c) Sei nun zusätzlich $O_k := \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \mathrm{dist}(\{x\}, O^{\mathrm{c}}) > 1/k\right\}$ für $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Zeigen Sie, dass $O \backslash O_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j$ gilt, und dass daraus $\lambda^{\mathrm{a}}((O \backslash O_k) \cap B) \to 0$ für $k \to \infty$ folgt.

(d) Zeigen Sie nun die Ungleichung

$$\lambda^{\mathrm{a}}(O \cap B) + \lambda^{\mathrm{a}}(O^{\mathrm{c}} \cap B) \leq \lambda^{\mathrm{a}}(B) + \lambda^{\mathrm{a}}((O \backslash O_k) \cap B) \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Folgern Sie daraus, dass

$$\lambda^{\mathrm{a}}(O \cap B) + \lambda^{\mathrm{a}}(O^{\mathrm{c}} \cap B) = \lambda^{\mathrm{a}}(B)$$

für jedes $B \subset \mathbb{R}^d$ mit $\lambda^{\mathrm{a}}(B) < \infty$ und jede offene Menge O gilt. (Somit ist gezeigt, dass alle offenen Mengen Lebesgue-messbar sind.)

Aufgabe 6.3 (4 Punkte) (Jordan-Inhalt I) Der äußere und innere Jordan-Inhalt einer Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ ist definiert durch

$$\mu_{\mathrm{J}}^{\mathrm{a}}(A) := \inf \Big\{ \sum_{k=1}^{n} |I_k| \,\Big|\, n \in \mathbb{N}, I_k \text{ sind Intervalle mit } A \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k \Big\},$$
$$\mu_{\mathrm{J}}^{\mathrm{i}}(A) := \sup \Big\{ \sum_{k=1}^{n} |I_k| \,\Big|\, n \in \mathbb{N}, I_k \subset A \text{ sind Intervalle mit } I_k^\circ \cap I_l^\circ = \emptyset \text{ für } k \neq l \Big\},$$

(Beachten Sie (i) A° bezeichnet das Innere der Menge A und (ii) es wird über endlich viele Intervall-Inhalte summiert, während das äußere Maß aus der Vorlesung über abzählbare viele Intervalle definiert ist.)

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ heißt Jordan-messbar, falls $\mu_{\mathrm{J}}^{\mathrm{a}}(A) = \mu_{\mathrm{J}}^{\mathrm{i}}(A)$ gilt. Der Jordan-Inhalt ist dann gegeben durch $\mu_{\mathrm{J}}(A) := \mu_{\mathrm{J}}^{\mathrm{a}}(A)$.

(a) Finden Sie eine Menge $A \subset \mathbb{R}$, die Lebesgue-messbar, aber nicht Jordan-messbar ist. (Alternativ: Zeigen Sie, dass der Jordan-Inhalt μ_{J} kein Maß ist.)

(b) Zeigen Sie, dass für alle $A \subset \mathbb{R}^d$ die Ungleichung

$$\mu_{\mathrm{J}}^{\mathrm{i}}(A) \leq \lambda^{\mathrm{a}}(A) \leq \mu_{\mathrm{J}}^{\mathrm{a}}(A)$$

gilt, wobei λ^{a} das äußere Maß bezeichnet. (Somit gilt für jede Jordan-messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^d$, dass $\lambda^{\mathrm{a}}(A) = \mu_{\mathrm{J}}(A)$.)

Aufgabe 6.Z (4 Punkte) (Jordan-Inhalt II) Sei $\mu_{\mathrm{J}}^{\mathrm{a}}$ und $\mu_{\mathrm{J}}^{\mathrm{i}}$ der äußere und innere Jordan-Inhalt (wie in Aufgabe 6.C).

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass A genau dann Jordan-messbar ist, wenn für alle $\varepsilon > 0$ Intervalle I_k, $k = 1, ..., N$ mit $I_k^\circ \cap I_j^\circ = \emptyset$ für $k \neq j$ existieren, so dass für ein $M < N$ gilt

$$\bigcup_{k=1}^{M} I_k \subset A \subset \bigcup_{k=1}^{N} I_k \quad \text{und} \quad \bigcup_{k=M+1}^{N} |I_k| < \varepsilon.$$

(b) Zeigen Sie, dass der Rand jeder Jordan-messbaren Menge eine Nullmenge ist. (Erinnerung: Der Rand einer Menge ist definiert durch $\partial A = \overline{A} \backslash A^\circ$, wobei $\overline{A}$ den Abschluss und A° das Innere der Menge A bezeichnet.)

Die folgenden Aufgabe werden teilweise in den Übungen am 21.–23. November 2017 besprochen

---

Aufgabe 6.A Sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maß-Raum. Zeigen Sie, dass die folgenden elementaren Eigenschaften gelten.

(a) Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gilt $\mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

(b) Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$ gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(c) Für jede abzählbare Folge $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ von Teilmengen $A_i \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

(d) Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$ und $\mu(A) < \infty$ gilt $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.