Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. A. Mielke
Ph. Bringmann, Dr. I. Kmit
R. Hasenfelder, A. D. Vu

Analysis 3
WiSe 2017/18

Übungsblatt 5

Schriftliche Abgabe: Dienstag 21. November 2017 (13:15 Uhr)

Hinweis: Die mit einem **(V)** gekennzeichneten Aufgaben können Sie in den Übungen vom 21.-23. November vorrechnen. Bitte bereiten Sie entsprechende Unterlagen vor.

Aufgabe 5.1 (4 Punkte) Betrachten Sie die nichtlineare Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_1 + 3x_2 \\ \alpha x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ x_1 x_2 - x_3 \end{pmatrix} \text{ mit Parameter } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die Anzahl und die Lage der Gleichgewichtslösungen in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie, dass $x = 0$ für $\alpha < 1$ stabil ist und für $\alpha > 1$ instabil ist.

(c) Linearisieren Sie die Differentialgleichung für $\alpha > 1$ in den nicht-trivialen Gleichgewichten. Versuchen Sie aufgrund der Linearisierung die Aussage über die Stabilität dieser Gleichgewichte zu machen.

Aufgabe 5.2 (5 Punkte) (V) Betrachten Sie in $\mathbb{R}^2$ die nichtlineare Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -x_2(t)^3 - \sin(x_1(t)) \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

(a) Berechnen Sie die alle Gleichgewichtslösungen von (*).

(b) Berechnen Sie die Linearisierungen in den Gleichgewichten. Können damit Aussagen über die Stabilität aller oder mancher der Gleichgewichtslösungen gemacht werden?

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} x_2^2 - \cos(x_1)$$

entlang der Lösungen monoton fällt.

(d) Schlussfolgern Sie mittels V auf die Stabilität der Gleichgewichtslösung $x = 0$.

Aufgabe 5.3 (4 Punkte) (V) (a) Es seien $a, b \geq 0$ und $\mu \in \mathrm{C}^0([\alpha, \beta])$ mit

$$\mu(t) \leq a + b \int_\alpha^t \mu(s)\,\mathrm{d}s \qquad \text{für alle } t \in [\alpha, \beta].$$

Beweisen Sie die Ungleichung $\mu(t) \leq a\mathrm{e}^{b(t-\alpha)}$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$.
(*Tipp:* Betrachte $w(t) = a + b \int_\alpha^t \mu(s)\,\mathrm{d}s$ und zeige $\dot{w} \leq bw$).

(b) Seien $\mu, a : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ und $b : [\alpha, \beta] \to [0, \infty)$ stetig mit

$$\mu(t) \leq a(t) + \int_\alpha^t b(s)\mu(s)\,\mathrm{d}s \qquad \text{für alle } t \in [\alpha, \beta].$$

Beweisen Sie die Ungleichung

$$\mu(t) \leq a(t) + \int_\alpha^t a(s)\, b(s)\, \exp\left(\textstyle\int_s^t b(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right) \mathrm{d}s \qquad \text{für alle } t \in [\alpha, \beta].$$

Aufgabe 5.Z (3 Punkte) Sei $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ global Lipschitz-stetig in x. Für gegebenen Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^m$ in $t_0 \in \mathbb{R}$ bezeichne $\hat{x}(\bullet; t_0, x_0) : I \to \mathbb{R}^m$ die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ mit $x(t_0) = x_0$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi : I \times \mathbb{R}^m \ni (t_0, x_0) \mapsto \hat{x}(\bullet; t_0, x_0)$ Lipschitz-stetig ist. *Tipp:* Verwenden Sie die Integraldarstellung $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\,\mathrm{d}s$ und Aufg. 5.3.

(b) Nehmen Sie an, es gelte nur "einseitige Lipschitz-Stetigkeit", d.h.

$$\exists\, L \geq 0\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^m\ \forall\, t \in I : \qquad \langle f(t,x) - f(t,y), x-y \rangle \leq L\|x-y\|^2.$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$ und $t \in I$. Zeigen Sie ebenso die Lipschitz-Stetigkeit von Φ.

(c) Betrachten Sie das Anfangswertproblem $\dot{x} = -|x|^{1/2}\,\mathrm{sign}(x)$. Zeigen Sie, dass

$$|\hat{x}(t; t_0, x_0) - \hat{x}(t; t_0, \widetilde{x}_0)| \leq |x_0 - \widetilde{x}_0|.$$

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen am 14.–16. November 2017 besprochen

---

Aufgabe 5.A Diskutieren Sie in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ das Stabilitätsverhalten der Gleichgewichtslösung $x = 0 \in \mathbb{R}^2$ der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1(x_2^2 - 1) + x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5.B Betrachten Sie die Differentialgleichung $\ddot{x} + d\dot{x} + x^3 = 0$ für $d > 0$. Zeigen Sie asymptotische Stabilität mit Hilfe der Liapunov-Funktion $V(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{4}x^4$ sowie die Instabilität der zugehörigen Linearisierung.

Aufgabe 5.C Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \gamma(x_1^2 + x_2^2) & \omega \\ -\omega & \gamma(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} x \qquad \text{mit Parametern } \gamma, \omega \in \mathbb{R}.$$

Transformieren Sie das System in Polarkoordinaten und untersuchen Sie die Stabilität der Gleichgewichtslösung $x = 0$ in Abhängigkeit von den Parametern. Diskutieren Sie außerdem die Stabilität der Linearisierung.