Übungsblatt 4

Schriftliche Abgabe: Dienstag 14. November 2017 (13:15 Uhr)

Hinweis: Die Aufgaben, die mit einem **(V)** gekennzeichnet sind, können Sie in den Übungen vom 14.-16. November vorrechnen. Bitte bereiten Sie entsprechende Unterlagen vor.

Aufgabe 4.1 (4 Punkte) Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \mathrm{e}^t \sin(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 4.2 (4 Punkte) Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen die Stabilitätseigenschaft des zugehörigen linearen Systems $\dot{x}(t) = Ax(t)$ im stationären Punkt $0 \in \mathbb{R}^n$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -\pi & -1 & \pi \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} -2-\mathrm{i} & -\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i} & -\frac{5}{2}+\frac{7}{2}\mathrm{i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{11}{4}+\frac{7}{4}\mathrm{i} & -\frac{7}{4}+\frac{7}{4}\mathrm{i} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4}+\frac{5}{4}\mathrm{i} & -\frac{1}{2}+\frac{5}{4}\mathrm{i} \end{bmatrix}$

Aufgabe 4.3 (4 Punkte) (V) Es sei $\dot{x}(t) = Ax(t)$ ein asymptotisch stabiles lineares System mit konstanter Systemmatrix $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ eine periodische Funktion mit Periode $T > 0$.

(a) Geben Sie alle Lösungen $x_{\text{allg}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ des inhomogenen Systems $\dot{x} = Ax + b$ mittels Variation der Konstanten an.

(b) Zeigen Sie durch geeignete Wahl der Anfangsbedingung, dass eine der Lösungen periodisch mit Periode T ist. (Hinweis: Uneigentliches Integral $x_{\text{per}}(t) = \int_{-\infty}^{t} \cdots \,\mathrm{d}s$.)

(c) Zeigen Sie für jede Lösung x des inhomogenen Systems, dass $x(t) - x_{\text{per}}(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

Aufgabe 4.4 (4 Punkte) (V) Betrachten Sie das explizite Euler'sche Polygonzugverfahren $X_0 = I$ und $X_{k+1} = X_k + \tau A X_k$ für $k = 0, 1, \ldots$ aus Aufgabe 3.Z für das Anfangswertproblems $\dot{x}(t) = Ax(t)$ mit $A = \begin{bmatrix} -1 & 100 \\ -100 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Geben Sie die Fundamentallösung e^{tA} explizit an und zeigen Sie $\mathrm{e}^{tA} \to 0$ für $t \to \infty$.

(b) Geben Sie Schrittweiten $\tau_1, \tau_2 > 0$ an, sodass die Approximationen X_k einmal gegen 0 streben und das andere mal gegen ∞ streben. (Hinweis: Betrachten Sie die Eigenwerte von $I + \tau A$.)

(c) Zeigen Sie, dass für allgemeine asymptotisch stabile Systeme mit $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, immer ein $\tau_0 > 0$ existiert, sodass für alle $\tau \in]0, \tau_0[$ die Approximationen X_k gegen 0 konvergieren.

Aufgabe 4.Z (3 Punkte) Gedämpftes Pendel Zeigen Sie, dass für jede Lösung $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = \sin(t^2)$ gilt

$$x(t) \to 0 \qquad \text{für } t \to \infty.$$

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen am 7.–9. November 2017 besprochen

---

Aufgabe 4.A Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen die Stabilitätseigenschaft des zugehörigen linearen Systems $\dot{x}(t) = Ax(t)$ im stationären Punkt $0 \in \mathbb{R}^2$.

(a) $A = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} -2-2\mathrm{i} & -1+3\mathrm{i} \\ -2+\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} \end{bmatrix}$

Aufgabe 4.B Zeigen Sie für $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $t > 0$, dass

$$\big(I + \frac{t}{n}A\big)^n \;\to\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k \qquad \text{für } n \to \infty$$

gilt. Verwenden Sie dazu nicht die Ergebnisse aus Aufgabe 3.Z, sondern schreiben Sie $(I+\frac{t}{n}A)^n$ als Polynom in t und gehen Sie in den matrixwertigen Polynomen zum Grenzwert über.