HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
Prof. A. Mielke
Ph. Bringmann, Dr. I. Kmit
R. Hasenfelder, A. D. Vu

Analysis 3
WiSe 2017/18

Übungsblatt 3 (vom 29.10.2017)

Schriftliche Abgabe: Dienstag 7. November 2017 (13:15 Uhr)

Aufgabe 3.1 (3 Punkte) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} x(t).$

Aufgabe 3.2 (4 Punkte) Auto fährt von Rampe: Ein Kleinwagen inklusive Passagieren habe die Masse $m = 1000\,\text{kg}$. Die Vertikalauslenkung $x(t)$ aus der Ruhelage erfülle die Differenzialgleichung

$$m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + k\big(x(t) - x_{\text{Rampe}}(t)\big) = 0.$$

Dabei sei die Federkonstante $k = 25000\frac{\text{N}}{\text{m}}$ (mit N=kg m/sec^2) und die Dämpfungskonstante $d = 8000\,\text{kg/sec}$. Aufgrund der Fahrtgeschwindigkeit erscheint die Rampe in der Form

$$x_{\text{Rampe}}(t) = 0.1\,\text{m für } t < 0 \qquad \text{und} \quad x_{\text{Rampe}}(t) = 0\,\text{m für } t > 0.$$

Für $t < 0$ sei die Lösung $x(t) = x_{\text{Rampe}}(t)$. Bestimmen Sie die Lösung für $t > 0$.

(a) Welche Anfangsbedingungen sollen bei $t = 0$ gelten?

(b) Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems explizit an.

(c) Berechnen Sie die maximale Auslenkung nach unten explizit, d.h. $\inf\{\, x(t) \,|\, t \geq 0 \,\}$.

Aufgabe 3.3 (4 Punkte) Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differenzialgleichung an:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 3.4 (5 Punkte) Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine Matrix, die keine Eigenwerte auf der imaginären Achse hat und $\Omega > 0$ eine Kreisfrequenz. Es soll gezeigt werden, dass für jede genügend glatte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ mit Periode $2\pi/\Omega$ die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax + f$ eine $2\pi/\Omega$-periodische Lösung besitzt.

(a) Lösen Sie die Gleichung $\dot{x} = Ax + \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\Omega t}\psi_m$ für beliebige $m \in \mathbb{Z}$ und $\psi_m \in \mathbb{C}^m$.

(b) Geben Sie auch für den Fall $f_N(t) = \sum_{m=-N}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\Omega t}\psi_m$ eine Lösung an.

(c) Sei nun f durch eine unendliche Fourier-Reihe gegeben, die absolut konvergiert (d.h. $\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\psi_m| < \infty$). Geben Sie die Lösung als Fourier-Reihe an und zeigen Sie, dass diese wirklich differenzierbar ist.

(bitte wenden)

Aufgabe 3.Z (5 Punkte) Euler'sches Polygonzugverfahren: Betrachten Sie das Anfangswertproblem $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$, $\Phi(0) = I$ im $\mathbb{R}^{m\times m}$ mit konstanten Koeffizienten. Sei $t > 0$ fest gewählt.

(a) Zeigen Sie, dass das explizite Euler'sche Polygonzugverfahren mit $X_0 = I$ und $X_{k+1} = X_k + \tau A X_k$ nach n Schritten den Wert $E_n(t) := (I + \frac{t}{n}A)^n$ als Approximation liefert.

(b) Betrachten Sie das implizite Euler-Verfahren

$$X_0 = I, \qquad X_{k+1} = X_k + \tau A X_{k+1}$$

und leiten eine analoge Folge $F_n(t)$ her.

(c) Zeigen Sie, dass die Folgen E_n und F_n für $n \to \infty$ gegen $\exp(tA)$ konvergiert. (Tipp: Begründen Sie zunächst, warum es ausreicht, die Behauptung nur für Jordan-Blöcke zu zeigen.)

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen am 1.–2. November 2017 besprochen

---

Aufgabe 3.A Berechnen Sie die Jordansche Normalform der folgenden Matrizen sowie die Matrix $\exp(tA)$ in Abhängigkeit von t. Geben damit die allgemeinen Lösungen des homogenen linearen Differentialgleichungssystems $\dot{x}(t) = Ax(t)$ an.

(a) $A = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Aufgabe 3.B Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\lambda = 1$ der einzige Eigenwert von A ist geben Sie seine algebraische und geometrische Vielfachheit an.

(b) Berechnen Sie alle Hauptvektorketten von A.

(c) Geben Sie mit Hilfe der Hauptvektorketten die allgemeinen Lösungen des homogenen linearen Differentialgleichungssystems $\dot{x}(t) = Ax(t)$ an.

Aufgabe 3.C Bestimmen Sie eine Partikulärlösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x + \mathrm{e}^t \begin{bmatrix} 2\cos t \\ \sin t \end{bmatrix}.$$