HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
Prof. A. Mielke
Ph. Bringmann, Dr. I. Kmit
R. Hasenfelder, N.N.

**Analysis 3**
**WiSe 2017/18**

# Übungsblatt 2

Schriftliche Abgabe: Donnerstag 2. November 2017 (9:15 Uhr)!!!!

---

**Aufgabe 2.1 (4 Punkte)** Gegeben seien $\omega > 0$ und $v_0 > 0$. Betrachten Sie die Differentialgleichung 2. Ordnung $\ddot{z} = -\omega^2 z$ mit den Anfangswerten $z(0) = 0$ und $\dot{z}(0) = v_0$.

(a) Reduzieren Sie das Anfangswertproblem auf ein System $\dot{x} = Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) Berechnen Sie die Picard-Iteration $x_1(t) \equiv x_0,\ x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))\,\mathrm{d}s$ für $k = 1, 2, 3$. Schlussfolgern Sie auf eine allgemeine Form und beweisen Sie diese ausführlich mittels vollständiger Induktion.

(c) Geben Sie die Lösung explizit durch bekannte Funktionen an.

**Aufgabe 2.2 (4 Punkte)** Bestimmen Sie mittels Variation der Konstanten alle Lösungen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ der folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungssysteme.

(a) $\quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -5t + 2 \\ -8t - 8 \end{bmatrix}$ $\qquad$ (b) $\quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 3\mathrm{e}^{2t} \\ t\,\mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}$

**Aufgabe 2.3 (4 Punkte)** Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ betrachten Sie die Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(tA) = \mathrm{e}^{tA} \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Nach Aufgabe 11.Z aus Analysis 2* ist $\Phi$ wohldefiniert. Zeigen Sie:

(a) $\Phi$ ist stetig differenzierbar.

(b) $\Phi$ erfüllt das Anfangswertproblem $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$ mit $\Phi(0) = I \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

**Aufgabe 2.4 (5 Punkte)** Betrachten Sie die homogene Differentialgleichung $k$-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{C}$

$$x^{(k)}(t) + a_{k-1}x^{(k-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{x}(t) + a_0 x(t) = 0. \qquad (*)$$

Sei $\chi : \mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \in \mathbb{C}$ das zugehörige *charakteristische Polynom.*

(a) Zeigen Sie: Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Nullstelle von $\chi$, so ist $x : \mathbb{R} \ni t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t} \in \mathbb{C}$ eine Lösung von $(*)$.

(b) Zeigen Sie: Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ eine $m$-fache Nullstelle von $\chi$, so sind

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}, \quad t\,\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad \ldots, \quad t^{m-1}\,\mathrm{e}^{\lambda t} \in \mathbb{C}$$

Lösungen von $(*)$.

(c) Geben Sie die Gesamtheit aller Lösungen von $(*)$ in Abhängigkeit der Nullstellen von $\chi$ an und begründen Sie, dass jede weitere Lösung eine Linearkombination aus den bekannten Lösungen ist. (Tipp: Sie können ohne Beweis benutzen, dass die Dimension des Lösungsraumes zu $(*)$ gleich $k$ ist.)

(bitte wenden)

**Aufgabe 2.Z (4 Punkte)** Sei $x_1 : I \to \mathbb{R}$ mit $x_1(t) \neq 0$ eine gegebene Lösung der skalaren Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\ddot{x}(t) + a(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) = 0.$$

(a) Leiten Sie mittels des Ansatzes $x = w\,x_1$ eine Differentialgleichung (R) für $w$ her und lösen diese. (Tipp: Konstante Funktionen $w$ lösen (R).)

(b) Geben die eine Lösung $x_2 : I \to \mathbb{R}$ der ursprünglichen Differentialgleichung in Abhängigkeit von $x_1$ an.

(c) Zeigen Sie, dass $x_1(t) = \sin(t)/\sqrt{t}$ ein Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + \frac{1}{t}\dot{x}(t) + \Big(1 - \frac{1}{4t^2}\Big)x(t) = 0$$

mit $I = (0, \infty)$ ist, und berechnen Sie mittels (b) die eine Lösung.

---

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen am 24.–26. Oktober 2017 besprochen

---

**Aufgabe 2.A** Sei $f : I \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ stetig. Betrachten Sie die skalare Differentialgleichung $k$-ter Ordnung

$$x^{(k)}(t) = f\big(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(k-1)}(t)\big)$$

und ihre Reduktion auf eine Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t))$$

mit $z = (x, \dot{x}, \dots, x^{(k-1)}) : I \to \mathbb{R}^k$ und $F : I \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$. Zeigen Sie: Ist $f$ lokal Lipschitz-stetig bezüglich $x$, so ist es auch $F$.

**Aufgabe 2.B** Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme.

(a) $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x(t), \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$

(b) $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \sin(t) \\ 2\cos(t) \end{bmatrix}, \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$