HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
Prof. A. Mielke
Ph. Bringmann, Dr. I. Kmit
R. Hasenfelder, N.N.

Analysis 3

WiSe 2017/18

Übungsblatt 1

Schriftliche Abgabe: Dienstag 24. Oktober 2017

Aufgabe 1.1 (5 Punkte) Berechnen Sie wie folgt mithilfe des Verfahrens von Picard-Lindelöf die sukzessiven Iterationen $x^{(k)}$ für das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = -tx(t), \quad x(0) = 1.$$

(a) Schreiben Sie dazu die Differenzialgleichung in der Integralform

$$x(t) = x_0(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s,$$

wobei t_0, $x_0(t_0)$ und f geeignet zu wählen sind.

(b) Berechnen Sie $x^{(k)}$ mittels der Iterationsvorschrift $x^{(k+1)}(t) = x_0(t_0)+\int_{t_0}^{t} f(s, x^{(k)}(s))\,\mathrm{d}s$ und der Anfangsfunktion $x^{(1)}(t) = x_0(t_0)$ für alle t. (Hinweis: Nach expliziter Berechnung von $x^{(k)}$ für $k = 2, 3$ und 4 kann die allgemeine Form geraten und dann mittels vollständiger Induktion bewiesen werden.

(c) Geben Sie die Lösung explizit durch bekannte Funktionen an.

Aufgabe 1.2 (4 Punkte) Wir betrachten die Funktion $f : x \mapsto \left|1-x^2\right|^{1/2}$ und die Differenzialgleichung $\dot{x} = f(x)$.

(a) Zeigen Sie, dass $x(t) = -\cos t$ für $t \in [0, \pi]$ eine Lösung ist.

(b) Zeigen Sie, dass $x(t) = \cosh(t+3)$ für $t \geq 0$ eine Lösung ist.

(c) Geben Sie alle Lösungen $x : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ der Differenzialgleichung an, die die Anfangsbedingung $x(0) = -1$ erfüllen.

Aufgabe 1.3 (4 Punkte) Bestimmen Sie die Lösungen der Differenzialgleichungen:

(a) $y'(x) = 1 + y(x)^2, \quad y(0) = 0.$

(b) $y'(x) = x^3 y(x)^5, \quad y(1) = 1.$

(c) $y'(x) = \frac{1}{2}y(x) - xy(x)^5, \quad y(0) = 1.$

Aufgabe 1.4 (3 Punkte) Bestimmen Sie mittels der Variation der Konstanten alle Lösungen der linearen Differenzialgleichung

$$\dot{x} = \frac{-3}{1+t}\,x + \frac{1}{(1+t)^2} \qquad \text{für } t > -1.$$

Aufgabe 1.Z (4 Punkte) Ein Golfball der Masse $M = 50$g wird mit 50 m/sec senkrecht nach oben geschossen. Die Geschwindigkeit wird durch die Schwerkraft $G = 9.81$ m/sec^2 und die Luftreibung verändert:

$$M\dot{v}(t) = -MG - \mu|v(t)|v(t) \quad \text{mit Reibkoeffizient} \mu = 0.5\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}}.$$

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit und versuchen Sie die Aufprallgeschwindigkeit auf bei Rückkehr zum Boden zu bestimmen.

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen am 17.–19. Oktober 2017 besprochen

Aufgabe 1.A Lösen Sie die lineare Differenzialgleichung

$$\dot{x}(t) = \sin(t)\, x(t)^{\alpha},\ x(0) = 1$$

für möglichst alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 1.B Bestimmen Sie alle Lösungen der Bernoulli-Gleichung $\dot{x} = x - x^3$ und der linearen inhomogenen Gleichung

$$\dot{x}(t) = \sinh(t)x(t) + \sinh(t)\mathrm{e}^{2\cosh(t)}.$$

Aufgabe 1.C Es sei die Funktion

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0, \\ x & \text{für } x \leq 0, \end{cases}$$

gegeben. Untersuchen Sie die Differenzialgleichungen

(a) $\dot{x} = h(x)$

(b) $\dot{z} = -h(z)$

für alle Anfangsbedingungen auf Eindeutigkeit der Lösung.