Übungsblatt 9

Aufgabe 32 (Stetige, injektive und invertierbare Operatoren): Es seien H ein HILBERT–Raum, $\{ e_j \mid j \in \mathbb{N} \}$ ein Orthonormalsystem, $a_j \in \mathbb{R}$ und $T : H \to H$ die Abbildung mit

$$Tx = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \langle x, e_j \rangle e_j.$$

(a) Zeige, dass $T \in \mathcal{L}(H, H)$ gilt, falls die Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

(b) Es sei nun $a_j = 1/j^2$. Zeige, dass $\mathrm{Bild}(T) = TH = \{ Tx | x \in H \}$ ein nichtabgeschlossener linearer Unterraum von H ist. Welche Voraussetzungen an die Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ liefern ein abgeschlossenes $\mathrm{Bild}(T)$?

(c) Unter welchen Zusatzvoraussetzungen zu (a) ist T injektiv?

(d) Welche weitere Voraussetzungen zu (a) und (c) garantieren, dass $T^{-1} : TH \to H$ stetig ist?

Aufgabe 33 (Fourier-Transformation): Für $f \in \mathrm{S}(\mathbb{R})$ sei die Fouriertransformierte durch

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x$$

gegeben. Für $a > 0$ und $\eta \in \mathbb{R}$ setzen wir $E_{a,\eta} \in \mathrm{S}(\mathbb{R})$ mit $E_{a,\eta}(x) = \mathrm{e}^{-ax^2+\eta x}$.

(a) Zeige für das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, dass die Beziehung

$$\langle E_{a,\eta}, E_{b,\mu} \rangle = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} \exp\left(\frac{(\eta+\mu)^2}{4(a+b)} \right)$$

gilt, wobei $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ als bekannt vorausgesetzt werden darf.

(b) Zeige nun $\big(\mathcal{F}E_{a,\eta}\big)(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \mathrm{e}^{\eta^2/(4a)}\, E_{1/(4a),-\mathrm{i}\eta/(2a)}(\xi)$.

(c) Folgere $\langle \mathcal{F}E_{a,\eta}, \mathcal{F}E_{b,\mu} \rangle = 2\pi \langle E_{a,\eta}, E_{b,\mu} \rangle$ und zeige weiter, dass für alle $f, g \in \mathrm{Span}\{ E_{a,\eta} \mid a > 0, \eta \in \mathbb{R} \}$ die Beziehung $\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle$ gilt.

(d) Unter Verwendung der als bekannt vorausgesetzten Tatsache, dass $\mathrm{Span}\{ E_{a,\eta} | a > 0, \eta \in \mathbb{R} \}$ dicht in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ist, soll nun $\|\mathcal{F}f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi}\|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}$ für alle $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ gezeigt werden.

Aufgabe 34 (Vervollständigungen):

(a) Es sei S ein dichter Unterraum eines Banach-Raumes $(X, \|\cdot\|)$ und $(Y, |\cdot|)$ ein zweiter Banach-Raum. Weiter sei $T : S \to Y$ linear und stetig. Zeige, dass es ein eindeutiges $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit $A|_S = T$ gibt.

(b) Es seien E ein Vektorraum und $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf E, wobei $\|x\|_1 \le \|x\|_2$ für alle $x \in E$ gelte. Nun seien $(X_j, \|\cdot\|_j)$ für $j = 1, 2$ beliebige Vervollständigungen von $(E, \|\cdot\|_j)$ mit Einbettungen $I_j : E \to X_j$. Zeige, dass eine Abbildung $B \in \mathcal{L}(X_2, X_1)$ existiert mit $I_1 = B \circ I_2$.

(c) Folgere aus (b), dass alle Vervollständigungen eines normierten Vektorraumes zueinander normäquivalent sind.

(d) Ist die Abbildung $B \in \mathcal{L}(X_2, X_1)$ aus (b) stets injektiv? Bestimme X_1, X_2 und B für folgendes Beispiel explizit: $E = \{ \mathbf{a} = (a_j)_{j\in\mathbb{N}} \mid \exists N\ \forall j > N : a_j = 0 \}$ mit den Normen $\|\mathbf{a}\|_1 = \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j|$ und $\|\mathbf{a}\|_2 = \|\mathbf{a}\|_1 + |\sum_{j\in\mathbb{N}} \beta_j a_j|$ mit geeigneter Folge $(\beta_j)_{j\in\mathbb{N}}$.