

## Übungsblatt 8

**Aufgabe 28 (Topologische Vektorräume):** Es sei  $(X, +, \mathbb{K}, \cdot)$  ein Vektorraum und  $HS = \{p_\alpha \mid \alpha \in I\}$  ein System von Halbnormen. Es sei die  $\mathfrak{T}_{HS}$ , die durch diese Halbnormen erzeugte Topologie.

- (a) Zeige, dass eine Menge  $O \subset X$  genau dann offen ist, wenn für alle  $x \in X$  die verschobene Menge  $x+O := \{x+y \mid y \in O\}$  offen ist.
- (b) Zeige, dass eine Menge  $O \subset X$  genau dann offen ist, wenn für alle  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  die Menge  $\lambda O := \{\lambda y \mid y \in O\}$  offen ist.
- (c) Bestätige, dass  $(X, \mathfrak{T}_{HS}, +, \cdot)$  ein topologischer Vektorraum ist.

**Aufgabe 29 (Schwartzsche Funktionen = schnellabfallende Funktionen):**

Es sei  $S(\mathbb{R}^d)$  die Menge der schnellabfallenden Funktionen nach LAURENT SCHWARTZ (\*5.3.1915 in Paris, †4.7.2002):

$$S(\mathbb{R}^d) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}) \mid \forall k, l \in \mathbb{N}_0 : p_{k,l}(f) < \infty\}$$

wobei  $p_{k,l}(f) = \sup\{(1 + |x|)^k |D^\alpha f(x)| \mid x \in \mathbb{R}^d, \alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha|_1 = l\}$  ist.

- (a) Zeige, dass  $S(\mathbb{R}^d)$  versehen mit dem Halbnormensystem  $HS = \{p_{k,l} \mid k, l \in \mathbb{N}_0\}$  ein vollständiger topologischer Vektorraum ist.
- (b) Zeige, dass  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$  dicht in  $S(\mathbb{R}^d)$  liegt.
- (c) Ist der SCHRÖDINGER-Operator  $H_{\text{Schröd}}$  aus Aufgabe 11 stetig als Abbildung von  $S(\mathbb{R}^d)$  in sich? In  $\mathbb{R}^d$  sei  $(H_{\text{Schröd}}f)(x) = -(\Delta f)(x) + |x|^2 f(x)$  mit  $\Delta f = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f$ .

**Aufgabe 30 (BANACH-Raum der stetigen linearen Operatoren):**

Für normierte Vektorräume  $(X, \|\cdot\|_X)$  und  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  sei  $\mathcal{L}(X, Y)$  die Menge der stetigen linearen Operatoren.

- (a) Zeige, dass die Operatornorm  $\|A\|_{X \rightarrow Y} = \sup\{\|Ax\|_Y \mid \|x\|_X \leq 1\}$  tatsächlich alle Normaxiome erfüllt.
- (b) Beweise, dass der normierte Vektorraum  $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|_{X \rightarrow Y})$  genau dann vollständig ist, wenn  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  ein BANACH-Raum ist. Es darf verwendet werden, dass für jeden BANACH-Raum  $X$  eine nichttriviale stetige lineare Abbildung in  $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$  existiert (Satz von HAHN-BANACH).
- (c) Es seien  $X$  und  $Y$  HILBERT-Räume. Ist dann  $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|_{X \rightarrow Y})$  immer ein HILBERT-Raum?

**Aufgabe 31 (Operatornormen):** Berechne die Operatornormen für folgende Beispiele:

(a)  $X = Y = \mathbb{R}^2$  und  $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$  mit den Normen

$$(a1) \|x\| = |x|_1 \quad (a2) \|x\| = |x|_2 \quad (a3) \|x\| = |x|_\infty$$

(b)  $X = Y = \ell^2 = \{\mathbf{a} = (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid \|\mathbf{a}\|_2 < \infty\}$  mit  $\|\mathbf{a}\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k^2$  und den Operatoren

$$(b1) T\mathbf{a} = (a_1, 0, a_2, 0, a_3, 0, \dots, a_k, 0, \dots)$$

$$(b2) T\mathbf{a} = (a_1 - 2a_2, a_2 - 2a_3, \dots, a_k - 2a_{k+1}, \dots)$$

(c)  $X = Y = L^\infty((0, \infty))$  mit der Norm  $\|\cdot\|_\infty$ ,  $(Af)(t) = \int_0^\infty K(t-s)f(s) ds$  und  $K(\tau) = \tau e^{-|\tau|}$ .