

## Übungsblatt 7

### Aufgabe 24 (Distributionenableitungen):

Hinweis: Zur Berechnung der Distributionenableitungen können die Integrationsgebiete in Bereiche zerlegt werden, in denen die Integranden glatt sind.

Bestimme alle Distributionenableitungen bis zur Ordnung 2 der folgenden Funktionen:

- (a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto |t|^{3/2};$
- (b)  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x_1, x_2) \mapsto \max\{0, x_1 x_2\};$
- (c)  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \max\{0, 1 - |x|^2\}.$

### Aufgabe 25 (Sobolevscher Einbettungssatz):

Ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein beschränktes Gebiet mit differenzierbarem Rand, dann gilt der Sobolevsche Einbettungssatz. Ist  $1 - d/p \geq -d/q$  mit  $1 \leq p < q < \infty$ , so ist  $W^{1,p}(\Omega)$  in  $L^q(\Omega)$  eingebettet (enthalten) und die  $W^{1,p}$ -Norm ist stärker als die  $L^q$ -Norm. Gilt sogar  $1 - d/p = \alpha \in (0, 1)$ , so ist  $W^{1,p}(\Omega)$  sogar in  $C^\alpha(\overline{\Omega})$  eingebettet.

(Dies soll hier nicht bewiesen werden, aber veranschaulicht. Beachte, dass im Allgemeinen für  $p < q$  nur  $C^\alpha(\overline{\Omega}) \subset L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$  gilt. Die Existenz einer Ableitung verbessert also die  $L^q$ -Zugehörigkeit.)

(a) Betrachte  $\Omega = B_1(0) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid |y| < 1\}$  und die Funktion  $f_\beta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f_\beta(y) = |y|^\beta$  für  $y \neq 0$ . Diskutiere für welche  $d, p, \alpha, \beta$  die Beziehungen  $f_\beta \in L^p(\Omega)$  bzw.  $f_\beta \in C^\alpha(\overline{\Omega})$  gelten.

(b) Zeige, dass für  $\beta > 0$  die Distributionenableitung  $\frac{\partial}{\partial x_j} f_\beta$  existieren und durch die klassischen Ableitungen ausgedrückt werden können. Folgere, dass  $f_\beta \in W^{1,p}(\Omega)$  genau für  $\beta > 1 - d/p$  gilt. Vergleiche mit das Ergebnis mit der Aussage des Sobolevschen Einbettungssatzes und überlege, ob die Aussagen "scharf" sind.

(c) Sei nun  $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}^1$  und  $p \in (1, \infty)$ . Zeige für Funktionen  $g$  in  $C^1([a, b])$  die Abschätzung

$$|g(t_1) - g(t_2)| \leq |t_1 - t_2|^{1-1/p} \|g'\|_{L^p}.$$

und folgere daraus die Einbettung  $W^{1,p}((a, b)) \subset C^{1-1/p}([a, b])$ .

### Aufgabe 26 (Topologische Vektorräume):

(a) Der normierter Vektorraum  $(X; \|\cdot\|)$  sei mit der Normtopologie  $\mathfrak{T}_{\|\cdot\|}$  versehen. Zeige, dass damit ein topologischer Vektorraum vorliegt (d.h., dass die Vektoraddition und die Skalarmultiplikation stetig sind).

(b) Betrachte  $X = \mathbb{R}^2$  als Vektorraum über  $\mathbb{R}$  mit der üblichen Vektoraddition und Skalarmultiplikation. Anstelle der Euklidische Topologie verwenden wir aber die feinere Topologie  $\mathfrak{T}_{\text{Strahlen}}$ , die durch die Mengen

$$\mathcal{O}(x, \varepsilon) = \{\rho x \in \mathbb{R}^2 \mid |\rho - 1| < \varepsilon\} \quad (\text{Strahlensegmente})$$

erzeugt wird. Zeige, dass die Skalarmultiplikation stetig ist, während die Vektoraddition unstetig ist. (Hinweis: Für die Unstetigkeit reicht es, ein  $\mathcal{O}(x, \varepsilon)$  zu finden, dessen Urbild  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  nicht offen ist, d.h.  $\exists (v, w) \in \mathcal{V} \forall \delta_v, \delta_w > 0 : \mathcal{O}(v, \delta_v) \times \mathcal{O}(w, \delta_w) \not\subset \mathcal{V}$ .)

### Aufgabe 27 (Lokale Lebesgue-Räume):

Für beliebige Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  und  $p \in [1, \infty]$  setzen wir

$$L_{\text{loc}}^p(\Omega) := \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ messbar und } \forall \omega \Subset \Omega : f|_{\omega} \in L^p(\omega) \},$$

wobei “ $\Subset$ ” kompakt enthalten bedeutet.

(a) Zeige, dass es innerhalb des Halbnormensystems

$$HS_{\Subset} = \{ p_{\omega} : L_{\text{loc}}^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \mid \omega \Subset \Omega \} \text{ mit } p_{\omega}(f) = \|f\|_{L^p(\omega)}$$

eine abzählbare Familie  $HS_{\mathbb{N}} = \{ \tilde{p}_k \mid k \in \mathbb{N} \} \subset HS_{\Subset}$  gibt, so dass für jedes  $\omega \Subset \Omega$  ein  $k \in \mathbb{N}$  und ein  $C_k > 0$  mit  $p_{\omega}(f) \leq C_k \tilde{p}_k(f)$  für alle  $f$  gibt.

(b) Gebe ein Metrik auf  $(L_{\text{loc}}^p(\Omega), \mathfrak{T}_{HS_{\Subset}})$  an.

(c) Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  beschränkt mit glattem Rand und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei eine Folge, die in  $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$  gegen  $f_*$  konvergiert und außerdem noch in  $L^q(\Omega)$  (ohne “loc”) beschränkt ist. Folgere im Falle  $1 \leq p < q \leq \infty$ , dass für alle  $r \in (p, q)$  Konvergenz in  $L^r(\Omega)$  vorliegt. Gilt eine entsprechende Aussage auch für  $1 \leq q \leq p \leq \infty$ ? (Hinweis: Schätze  $|f_n - f|^r$  in  $\omega \Subset \Omega$  anders ab, als in  $\Omega \setminus \omega$  und wähle  $\omega$  geeignet.)