Übungsblatt 6

Aufgabe 20 (Differentialoperator und Orthonormalsystem):
Auf dem Intervall $\Omega = (0,1)$ sei der Differentialoperator

$$L : Y \to X; u \mapsto u'' \quad \text{mit } Y \subset X = \mathrm{C}^0(\overline{\Omega})$$

gegeben, wobei $Y = \{\, u \in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega}) \mid u(0) = 0,\ u'(1) = 0 \,\}$ ist.

(a) Bestimme alle möglichen Eigenpaare $(\lambda_k, u_k) \in \mathbb{R} \times Y$ mit $Lu_k = \lambda_k u_k$.

(b) Zeige, dass für $u, v \in Y$ stets $\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle$ gilt, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standard-L^2-Skalarprodukt bezeichnet.

(c) Folgere, dass es keine Eigenpaare (λ, u) mit $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ gibt und dass Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal zueinander stehen.

(d) Zeige, dass die normierten Eigenfunktionen ein vollständiges ONS bilden.

Aufgabe 21 (Wärmeleitung):
J.J. Fourier hat 1807 die **Wärmeleitungsgleichung** $\frac{\partial}{\partial t}u = \mathrm{div}\big(\kappa\nabla u\big)$ als fundamentales Gesetz für Wärmeausbreitung aufgestellt. Dabei ist $\kappa > 0$ der Wärmeleitkoeffizient und u die Differenz der absoluten Temperatur zu einer gegebenen Referenztemperatur.

Wir wollen die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung (WLG) untersuchen. Dabei ist in $\Omega = (0, b)$ die Anfangstemperaturverteilung $u_0(x)$ gegeben und an Randpunkten soll jeweils die Referenztemperatur herrschen, d.h. $u = 0$. Insgesamt ist also eine Funktion $u : [0,\infty) \times [0, b] \to \mathbb{R}$ gesucht, die Folgendes erfüllt:

(WLG) $\quad u_t = \kappa u_{xx}$ in $(0,\infty) \times \Omega$,
(AB) $\quad u(0, x) = u_0(x)$ für $x \in \Omega$, $\qquad$ (RB) $\quad u(t, 0) = u(t, b) = 0$ für $t > 0$.

(a) Zeige, dass sich Lösungen von (WLG) und (RB) in der Form $u(t, x) = a(t)\sin(\mu x)$ finden lassen, wobei a und μ noch zu wählen sind.

(b) Wähle ein geeignetes ONS $\{\, e_j \mid j \in \mathbb{N} \,\}$ in $\mathrm{L}^2((0, b))$, so dass es Lösungen von (WLG) und (RB) in der Form $u(t, x) = \sum_{j=1}^{N} a_j(t)e_j(x)$ gibt.

(c) Wie kann für beliebige $u_0 \in \mathrm{L}^2((0, b))$ eine Lösung von (WLG) gefunden werden, die auch die Randbedingungen (RB) und die Anfangsbedingung (AB) erfüllt? (Zusatzfrage: Warum ist das so konstruierte u für $(t, x) \in (0,\infty) \times (0, b)$ genügend oft differenzierbar?)

bitte wenden

Aufgabe 22 (Konvergenzsätze in der LEBESGUE–Theorie):
Seien die reellwertigen Funktionen f_n, g_n, h_n, k_n auf $\Omega = (0, \infty)$ gegeben durch

(a) $f_n(x) = F(x-n)$ mit $F(x) = x\mathrm{e}^{-|x|}$,

(b) $g_n(x) = \begin{cases} 1/n & \text{für } x \in (n, n+1) \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$

(c) $h_n(x) = \begin{cases} n^\alpha & \text{für } x \in (0, 1/n) \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$

(d) $k_n(x) = \begin{cases} (1+x)^{-\beta} & \text{für } x \in (0, n^2) \\ -x^{-\gamma} & \text{für } x > n^2. \end{cases}$

Untersuche in Abhängigkeit von $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \infty)$, in welchem dieser Fälle die Sätze von Lebesgue (majorisierte Konvergenz), Fatou (einseitige Beschränktheit) und Beppo Levi (monotone Konvergenz) anwendbar sind. Berechne auch $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ bzw. die entsprechenden Ausdrücke für g_n, h_n, k_n.

Aufgabe 23 (Lebesgue-Räume):
(a) Beweise die Youngsche Ungleichung:

$$\alpha, \beta \geq 0, \quad p, p' \in [1, \infty] \text{ mit } \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{p'} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha\beta \leq \tfrac{1}{p}\alpha^p + \tfrac{1}{p'}\beta^{p'}.$$

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und p und p' wie in (a). Zeige die HÖLDER'sche Ungleichung:

$$f \in \mathrm{L}^p(\Omega),\ g \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad \left| \int_\Omega fg\,\mathrm{d}x \right| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

(Hinweis: Betrachte $|f(x)|/\|f\|_p$ und $|g(x)|/\|g\|_{p'}$.)

(c) Unter der Zusatzvoraussetzung $\Omega \subset B_R(0) \subset \mathbb{R}^d$ zeige, dass für $1 \leq p \leq q \leq \infty$ eine Konstante $C = C(p, q, R)$ existiert mit $\|f\|_p \leq C\|f\|_q$ für alle $f \in \mathrm{L}^q(\Omega)$. Folgere $\mathrm{L}^q(\Omega) \subset \mathrm{L}^p(\Omega)$ und zeige, dass für $p < q$ die p-Norm echt schwächer als die q-Norm ist.

(d) Gebe zwei unbeschränkte Gebiete Ω_{gut} und Ω_{schlecht} an, so dass im guten Fall die Aussagen von (c) richtig bleiben und dass sie im schlechten Fall falsch werden.