

Übungsblatt 5

J.J. FOURIER, PARIS, 1768-1830

Théorie analytique de la chaleur [1807]:

*L' étude approfondie de la nature est
la source la plus féconde des
découvertes mathématiques.*

Ein gründliches Studium der Natur ist die fruchtbarste Quelle
für mathematische Entdeckungen.

Aufgabe 16 (Vollständige Orthonormalsysteme):

Es sei $\mathcal{O} = \{e_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem in $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) \mathcal{O} ist vollständig, d.h. $\text{span } \mathcal{O}$ ist dicht in X .
- (ii) Gilt $\langle x, e_j \rangle = 0$ für $j \in \mathbb{N}$, so folgt $x = 0$.
- (iii) Für alle $x \in X$ gilt $\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2 = \|x\|^2$.
- (iv) Für alle $x \in X$ gilt $\sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

Aufgabe 17 (Sinus- und Cosinus-Reihen):

Für $b > 0$ betrachten wir $X = L^2((0, b))$ und die Funktionen

$$\tilde{f}_0(t) \equiv 1, \quad \tilde{f}_j(t) = \cos\left(\frac{\pi}{b} j t\right), \quad \tilde{g}_j(t) = \sin\left(\frac{\pi}{b} j t\right) \quad \text{für } j \in \mathbb{N}.$$

(a) Zeige, dass $\tilde{C} = \{\tilde{f}_k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ und $\tilde{S} = \{\tilde{g}_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ Orthogonalsysteme in X sind und gebe die Normierungsfaktoren α_k und β_j an, so dass $f_k = \alpha_k \tilde{f}_k$ und $g_j = \beta_j \tilde{g}_j$ auf ONSe C und S führen.

(b) Beweise, dass sowohl S als auch C vollständige Orthonormalsysteme sind. Verwende dabei, dass die Fourier-Reihendarstellung auf $L^2((0, 2b))$ durch ein vollständiges ONS gegeben ist. (Hinweis: Wie sollten Funktionen in $L^2((0, b))$ auf $L^2((0, 2b))$ fortgesetzt werden, um nur Sinus- bzw. Cosinusreihen zu erhalten?)

(c1) Berechne die Sinusreihendarstellung von $\tilde{f}_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$ mit $F_n = \sum_{j=0}^n \gamma_j \tilde{g}_j$.

(c2) Skizziere (besser plote) F_n für $n = 1, \dots, 5$ und möglichst ein paar höhere n , um das GIBBS'sche Phänomen zu bestätigen.

(c3) Wie genau strebt $\|\tilde{f}_0 - F_n\|_{L^2}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 0?

bitte wenden

Aufgabe 18 (Separabilität):

- (a) Zeige, dass die Banach-Räume $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ und $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ separabel sind.
- (b) Zeige, dass der Banach-Raum $BC^0((0,1)) = \{f \in C^0((0,1)) \mid f \text{ beschränkt}\}$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ nicht separabel ist. (Hinweis: Finde Funktionen, die den Folgen in $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ entsprechen.)
- (c) Zeige, dass jeder abgeschlossene Unterraum V eines separablen Banach-Raums $(X, \|\cdot\|)$ wieder ein separabler Banach-Raum ist. Gebe außerdem einen nichtseparablen Banach-Raum Y an, der einen abgeschlossenen Unterraum U hat, der unendlichdimensional und separabel ist.

Aufgabe 19 (Tensorproduktbasen):

Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^{\tilde{d}}$ offene Gebiete sowie H und \tilde{H} die Hilbert-Räume $L^2(\Omega)$ bzw. $L^2(\tilde{\Omega})$ versehen mit den üblichen Skalarprodukten. Außerdem seien die ONSe

$$S = \{e_j \in H \mid j \in \mathbb{N}\} \quad \text{und} \quad \tilde{S} = \{\tilde{e}_j \in \tilde{H} \mid j \in \mathbb{N}\}$$

gegeben.

- (a) Zeige, dass auf $X = L^2(\Omega \times \tilde{\Omega})$ durch

$$\mathcal{O} = \{g_{j,k} \in X \mid j, k \in \mathbb{N}\} \quad \text{mit} \quad g_{j,k} : \begin{cases} \Omega \times \tilde{\Omega} & \rightarrow \mathbb{K}, \\ (x, \tilde{x}) & \mapsto e_j(x)\tilde{e}_k(\tilde{x}) \end{cases}$$

ein Orthonormalsystem gegeben ist.

- (b) Folgere unter der Voraussetzung, dass die ONSe S und \tilde{S} vollständig sind, dass auch \mathcal{O} vollständig ist.
- (c) Gebe zwei verschiedene vollständige ONSe für $L^2(R)$ mit $R = (0,4) \times (0,1)$ an. Entwickle die Funktion $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1$ für $x \in (1,2) \times (1/3, 2/3)$ und $f(x) = 0$ sonst in eines dieser beiden ONSe.