

Übungsblatt 4

Aufgabe 12 (Normen und Skalarprodukte):

Für $X = C^0([-1, 1])$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ soll untersucht werden, ob

$$\|f\|^2 = \int_{-1}^1 |f(t)|^2 + \alpha f(t)f(-t) + \beta |f(t)f(-t)| dt.$$

eine Norm bzw. eine Skalarproduktnorm definiert.

(a) Betrachte $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto (x_1^2 + x_2^2 + \tilde{\alpha}x_1x_2 + \tilde{\beta}|x_1x_2|)^{1/2}$. Für welche $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathbb{R}$ ist N erklärt? Wann liegt eine Norm vor? (Hinweis: Aufgabe 1 kann hilfreich sein.)

(b) Schreibe $\|f\|^2$ in der Form $\int_0^1 N((f(t), f(-t)))^2 dt$ und berechne für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Abbildung $\|\cdot\|$ eine Norm auf X ist.

(c) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ aus (a) wird die Norm durch ein Skalarprodukt erzeugt.

Aufgabe 13 (Folgenraum ℓ_2):

$$\ell_2(\Gamma) = \{ (a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \mid \sum_{\gamma \in \Gamma} |a_\gamma|^2 < \infty \}.$$

(a) Zeige, dass $\langle a, b \rangle = \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma \bar{b}_\gamma$ wohldefiniert ist und die Skalarproduktaxiome erfüllt.

(b) Zeige, dass $(\ell_2(\Gamma), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbert-Raum ist.

Aufgabe 14 (Banach- und Hilbert-Räume):

(a) Es sein $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein offenes Gebiet und Γ abzählbar. Beweise, dass $C^0(\Omega)$, $C^\alpha(\Omega)$, $L^1(\Omega)$, $\ell_1(\Gamma)$ und $c_0(\Gamma)$, versehen mit ihren jeweiligen natürlichen Normen, keine Hilbert-Räume sind.

(b) Es sei $X = C^0([-1, 1]; \mathbb{C})$ und $\langle f, g \rangle_* = \int_{-1}^1 (1-t^2)f(t)\overline{g(t)} dt$. Zeige, dass ein Skalarprodukt vorliegt und bestimme eine Vervollständigung von $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_*)$. (Hinweis: Für geeignetes $\alpha \in \mathbb{R}$ kann die Abbildung $f \mapsto \tilde{f}$ mit $\tilde{f}(t) = (1-t^2)^\alpha f(t)$ hilfreich sein.)

Aufgabe 15 (HAARSche Wavelets):

Im Hilbert-Raum $L^2((0, 1))$ mit dem üblichen Skalarprodukt seien die Funktionen

$$h_{1,1} \equiv 1, \quad h_{1,2}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in (0, \frac{1}{2}] \\ -1 & \text{für } t \in (\frac{1}{2}, 1), \end{cases} \quad h_{k,m}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in (\frac{2m-2}{2^k}, \frac{2m-1}{2^k}) \\ -1 & \text{für } t \in (\frac{2m-1}{2^k}, \frac{2m}{2^k}) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

für $k \geq 2$ und $m = 1, \dots, 2^{k-1}$ erklärt.

(a) Skizziere die ersten sechs Funktionen und zeige, dass ein Orthogonalsystem vorliegt.

(b) Beweise induktiv, dass $V_n = \text{span}\{h_{k,m} \mid k = 1, \dots, n, m = 1, \dots, \max\{2, 2^{k-1}\}\}$ genau der 2^n -dimensionale Raum der Funktionen ist, die auf den Intervallen $((m-1)2^{-n}, m2^{-n})$ konstant sind.

(c) Setze $P_n : L^2((0, 1)) \rightarrow V_n$ mit $P_n f = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^{\max\{2, 2^{k-1}\}} \frac{\langle f, h_{k,m} \rangle_{L^2}}{\|h_{k,m}\|_{L^2}^2} h_{k,m}$. Zeige, dass $P_n f$ auf $((m-1)2^{-n}, m2^{-n})$ genau den Mittelwert von f auf diesem Intervall annimmt.

(d) Folgere mittels (c), dass ein vollständiges Orthogonalsystem vorliegt. (Hinweis: Für Polynome q kann $\|P_n q - q\|_{L^2} \rightarrow 0$ gezeigt werden.)