Übungsblatt 3

Aufgabe 8 (Der Folgenraum ℓ_1):

Es seien Γ eine beliebige unendliche, abzählbare Menge (z.B. $\mathbb{N}$) und

$$\ell_1 = \{\, (a_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \mid \|(a_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}\|_1 < \infty \,\} \quad \text{mit } \|(a_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}\|_1 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |a_\gamma|\,.$$

(a) Zeige, dass $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ ein normierter Vektorraum ist.

(b) Überprüfe, ob der Raum vollständig ist.

(c) Finde eine beschränkte Folge, die keinen Häufungspunkt hat.

Aufgabe 9 (Weitere Folgenräume):

Es sei mit Γ wie in Aufgabe 8 weiter

$$\ell_\infty = \{\, (a_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \mid \|(a_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}\|_\infty < \infty \,\} \quad \text{mit } \|(a_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}\|_\infty = \sup\{\, |a_\gamma| \mid \gamma \in \Gamma \,\}.$$

(a) Überprüfe, dass $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banach-Raum ist.

(b) Deute ℓ_1 als Teilmenge von ℓ_∞ und zeige, dass $\|\cdot\|_1$ stärker als $\|\cdot\|_\infty$ ist. Finde eine Folge, die bzgl. der einen Norm konvergiert, aber nicht bzgl. der anderen.

(c) Zeige, dass die Menge der Nullfolgen

$$c_0 = \{\, (a_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \mid a_\gamma \to 0 \text{ für } \gamma \to \infty \,\}$$

der Abschluss von ℓ_1 (als Teilmenge von ℓ_∞ aufgefasst) im Banach-Raum $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ist.

Aufgabe 10 (Banachscher Fixpunktsatz):

Zeige Versionen (a) und (b) des bekannten Satzes, wobei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum ist.

(a) Es sei $M \subset X$ abgeschlossen und $\Phi : M \to M$ sei eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante $\kappa < 1$. Dann besitzt Φ einen eindeutigen Fixpunkt x^* und für jeden Startpunkt $x_0 \in M$ gilt für die Iterationen $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ die a priori Fehlerabschätzung

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{\kappa^n}{1-\kappa}\|x_0 - \Phi(x_0)\|.$$

bitte wenden

(b) Es sei $\Psi : X \to X$ eine Abbildung für die $R > 0$, $\kappa \in (0,1)$ und $y \in X$ existiert, so dass für $x_1, x_2 \in \overline{B_R(y)} = \{\, x \in X \mid \|x-y\| \le R \,\}$ gilt:

$$\|\Psi(x_1) - \Psi(x_2)\| \le \kappa\, \|x_1 - x_2\| \quad \text{und } \|y - \Psi(y)\| \le (1-\kappa)R.$$

Dann hat Ψ einen Fixpunkt in $\overline{B_R(y)}$.

(c) Wähle eine Norm in $\mathbb{R}^2$ in der Form $\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + a|x_2|$, so dass für

$$\Psi(x) = \Big(\tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{16} + 4x_2^4\,,\ \tfrac{1}{16}\sin x_1 + \tfrac{1}{2}x_2\Big)$$

mittels (b) ein Fixpunkt nahe 0 gefunden werden kann.

Aufgabe 11 (Hermitesche Funktionen und Polynome):

Die *Hermiteschen Funktionen* $\psi_n(x) = C_n \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x)$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, d.h.,

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} := \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)\psi_m(x)\,\mathrm{d}x = \delta_{n-m}. \tag{O}$$

Dabei sind $H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2}$ die *Hermiteschen Polynome*, die Orthogonalpolynome heißen, da sie bezüglich des gewichteten Skalarprodukts

$$\langle p, q \rangle_{\mathrm{Herm}} = \int_{\mathbb{R}} p(x)q(x)\, \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

ein Orthonormalsystem bilden.

(a) Für $n = 0, 1, 2, 3$ bestimme durch explizite Rechnung H_n und die Normierungskonstanten C_n. Rechne die Orthogonalität der vier ψ_n explizit nach. (Hinweis: Verwende $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x^2}\,\mathrm{d}x\big|_{\lambda=1}$.)

(b) Unter Verwendung der Tatsache, dass das Polynom H_n die gewöhnliche Differentialgleichung $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$ erfüllt, zeige

$$\Big(H_{\text{Schröd}}\psi\Big)(x) := -\psi_n''(x) + x^2\psi_n(x) = (2n+1)\psi_n(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \tag{**}$$

und folgere die Orthonormalität (O) für alle $n, m \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Die Hermiteschen Funktionen spielen eine wichtige Rolle in der Quantenmechanik. Die Gleichung (**) zeigt, dass ψ_n ein Eigenzustand des Schrödinger-Operators $H_{\text{Schröd}}$ für den linearen harmonischen Oszillators zum “Energiewert” $2n+1$ ist.